Г. П. КЛИМОВ
Г. К. МИШКОЙ

ПРИОРИТЕТНЫЕ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОРИЕНТАЦИЕЙ

Г. П. КЛИМОВ
Г. К. МИШКОЙ

ПРИОРИТЕТНЫЕ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОРИЕНТАЦИЕЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1979

УДК 519.21

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета*

Рецензенты:
проф. Б. В. Гнеденко,
проф. В. М. Золотарев

Климов Г. П., Мишкой Г. К.
Приоритетные системы обслуживания с ориентацией. М., Изд-во Моск. ун-та, 1979.
223 с. 12 ил.. Библиогр. назв.

В последние годы интенсивно развивается раздел теории массового обслуживания, посвященный исследованию приоритетных систем обслуживания. Порядок обслуживания требований разных типов, определяемый введением приоритетов, в некоторых случаях считается вполне естественным. В других же случаях такой порядок возникает в качестве оптимального, например минимизирующего средние потери из-за ожидания. В теоретических исследованиях таких систем обычно предполагают, что переключение или ориентация системы для обслуживания требования другого типа происходит мгновенно. Результаты книги относятся к анализу приоритетных систем с ориентацией. В частности, разработаны методы определения распределения очереди требований разных типов в стационарном и нестационарном режимах.

Книга предназначается для научных работников и инженеров, использующих в своих исследованиях методы и приложения теории массового обслуживания.

$К\frac{20204-191}{077(02)-79}$ 80—79 1502000000

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 2.

ПЕРИОДЫ ЗАНЯТОСТИ. ПОЛУОТНОСИТЕЛЬНЫЙ И ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ ПРИОРИТЕТ

Глава 3.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОЧЕРЕДИ. АБСОЛЮТНЫЙ И ПОЛУАБСОЛЮТНЫЙ ПРИОРИТЕТ

Глава 4.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОЧЕРЕДИ. ПОЛУОТНОСИТЕЛЬНЫЙ И ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ ПРИОРИТЕТ

Глава 5.

ВЕРОЯТНОСТИ СОСТОЯНИЯ ПРИБОРА

Глава 6.

СИСТЕМА $M_r|G_r|1|_\infty$ С ОРИЕНТАЦИЕЙ И АБСОЛЮТНЫМ ПРИОРИТЕТОМ

Глава 7.

СИСТЕМА $M_r|G_r|1|_\infty$ С ОРИЕНТАЦИЕЙ И СМЕШАННЫМ ПРИОРИТЕТОМ

Дополнение 1

Дополнение 2

Перечень сокращений, основных определений и обозначений

Сокращения

сл. в. — случайная величина

ф. р. — функция распределения

преобразование Л. — С. — преобразование Лапласа — Стилтьеса

<...> — вероятность чего есть...

a_k-вызов — вызов приоритета k, потока L_k

$(\to k)$ — ориентация прибора от L_i к L_k $i \neq k$

$(2 \to 1)$ есть $(\to 1)$ — ориентация прибора от L_2 к L_1

$((1 \to 2)$ есть $(\to 2)$ — ориентация прибора от L_1 к L_2

«катастрофа» — вызов пуассоновского потока с параметром s

Обозначения к рисункам

— законченная ориентация;

— ориентация не доведена до конца;

— законченное обслуживание;

— незаконченное обслуживание;

— цикл ориентации;

— цикл обслуживания.

Основные определения

k-цикл ориентации. Начинается с момента начала ориентации прибора к обслуживанию a_k-вызова; заканчивается, как только прибор готов приступить к обслуживанию этого вызова.

Цикл ориентации есть 2-цикл ориентации.

k-цикл обслуживания. Начинается с момента начала обслуживания a_k-вызова; заканчивается, как только система освобождается от этого вызова и прибор готов приступить к обслуживанию другого a_k-вызова. *Цикл обслуживания* есть 2-цикл обслуживания.

Неполный цикл обслуживания. Начинается с момента начала обслуживания a_2-вызова; заканчивается, как

только система освободится от данного вызова и a_1-вызовов.

Π_{kk}-*период.* Начинается с момента поступления a_k-вызова в свободную систему; заканчивается сразу, как только система освобождается от a_k-вызовов.

Π_k-период. Начинается с момента начала ориентации ($\to i$) при поступлении a_i-вызовов, $i \leqslant k$, в свободную систему; заканчивается, как только система освобождается от a_k-вызовов.

$\overline{\Pi}_k$-период. Начинается с момента начала ориентации a_k-вызова в свободную от a_i-вызовов; $i<k$, и ориентированную ($\to k$)-систему; заканчивается, как только система освобождается от a_k-вызовов.

$\overline{\Pi}_k^{(n)}$-*период.* Начинается с момента первого поступления на прибор одного из n a_k-вызовов, находящихся в системе; заканчивается сразу, как только система освобождается от a_k-вызовов.

Π_2^0-*период.* Начинается с момента поступления в свободную и ориентированную ($1\to 2$) систему a_2-вызова; заканчивается, как только система освобождается от a_1- и a_2-вызовов.

$\overline{\Pi}_2^1$-*период.* То же, что и $\overline{\Pi}_2^0$ -период, только если последний обслуженный вызов ($\overline{\Pi}_2^0$ -периода) является a_1-вызовом, то сразу же осуществляется ориентация ($1\to 2$).

Отдельный промежуток — промежуток, для которого время отсчитывается с его начала.

Прибор находится в состоянии j, если в данный момент он занят: 1) ориентацией ($2\to 1$); 2) обслуживанием a_1-вызова; 3) ориентацией ($1\to 2$); 4) обслуживанием a_2-вызова.

Основные обозначения

Случайные величины (сл. в.) обозначаются большими буквами греческого или латинского алфавита: B_k, N_2, Π, ..., функции распределения (ф. р.) сл. в. обозначаются теми же буквами: $B_k(x)=P\{B_k<x\}$, $N_2(x)$, $\Pi(x)$, ...; преобразование Л.— С. ф. р.— соответствующими малыми буквами: $\beta_k(s)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}\,dB_k(x)$, $\nu_2(s)$, $\pi(s)$, ...; моменты первого порядка — теми же малыми буквами, снабженными индексом 1:

$$\beta_{k1}=\int\limits_0^\infty x\,dB_k(x),\quad \nu_{21},\quad \pi_1,\ \ldots,$$

a_k — параметр пуассоновского потока L_k.

σ_k — параметр суммарного потока вызовов приоритета k и выше ($\sigma_k=a_1+\ldots+a_k$; $\sigma_0=0$, $\sigma_r=\sigma$).

$[\sigma-az]_k$ — параметр пуассоновского потока синих вызовов приоритета k и ниже ($[\sigma-az]_k=a_k(1-z_k)+ +\ldots+a_r(1-z_r)$).

$[\ ]_1$ — параметр пуассоновского потока синих a_1- и a_2-вызовов ($[\ ]_1=a_1(1-z_1)+a_2(1-z_2)$).

$[\ ]_2$ — параметр пуассоновского потока синих a_2-вызовов ($[\ ]_2=a_2(1-z_2)$).

Функции распределения длительностей основных промежутков и преобразование Л. — С. этих функций:

$B_k(x)$, $\beta_k(s)$ — для времени обслуживания a_k-вызова
$C_{12}(x)$, $c_{12}(s)$ — для ориентации $(1\to 2)$
$C_{21}(x)$, $c_{21}(s)$ — для ориентации $(2\to 1)$
$C_k(x)$, $c_k(s)$ — для ориентации $(\to k)$
$N_k(x)$, $\nu_k(s)$ — для k-цикла ориентации
$H_2^0(x)$, $h_2^0(s)$ — для неполного цикла обслуживания
$H_k(x)$, $h_k(s)$ — для k-цикла обслуживания
$\Pi_{kk}(x)$, $\pi_{kk}(s)$ — для Π_{kk}-периода
$\Pi_k(x)$, $\pi_k(s)$ — для Π_k-периода
$\overline{\Pi}_k(x)$, $\overline{\pi}_k(s)$ — для $\overline{\Pi}_k$-периода
$\overline{\Pi}_k^{(n)}(x)$, $\overline{\pi}_k^{(n)}(s)$ — для $\overline{\Pi}_k^{(n)}$-периода
$\overline{\Pi}_2^0(x)$, $\overline{\pi}_2^0(s)$ — для $\overline{\Pi}_2^0$-периода
$\overline{\Pi}_2^1(x)$, $\overline{\pi}_2^1(s)$ — для $\overline{\Pi}_2^1$-периода
$\Pi(x)$, $\pi(s)$ — для периода занятости

Преобразование Лапласа по времени производящей функции совместного распределения числа вызовов каждого приоритета, находящихся в системе в любой момент времени отдельного промежутка, обозначается:

$\beta_k(z,\ s)$ — для отдельного промежутка обслуживания a_k-вызова
$c_{12}(z,\ s)$ — для отдельного промежутка ориентации $(1\to 2)$
$c_{21}(z,\ s)$ — для отдельного промежутка ориентации $(2\to 1)$
$c_k(z,\ s)$ — для отдельного промежутка ориентации $(\to k)$
$\nu_k(z,\ s)$ — для отдельного k-цикла ориентации
$h_2^0(z,\ s)$ — для отдельного неполного цикла обслуживания
$h_k(z,\ s)$ — для отдельного k-цикла обслуживания
$\pi_{kk}(z,\ s)$ — для отдельного Π_{kk}-периода
$\pi_k(z,\ s)$ — для отдельного Π_k-периода
$\overline{\pi}_k(z,\ s)$ — для отдельного $\overline{\Pi}_k$-периода
$\overline{\pi}_k^{(n)}(z,\ s)$ — для отдельного $\overline{\Pi}_k^{(n)}$-периода
$\overline{\pi}_2^0(z,\ s)$ — для отдельного $\overline{\Pi}_2^0$-периода
$\overline{\pi}_2^1(z,\ s)$ — для отдельного $\overline{\Pi}_2^1$-периода
$\pi(z,\ s)$ — для отдельного периода занятости

Преобразование Лапласа вероятностей нахождения прибора в состоянии j) в любой момент времени отдельного промежутка обозначается:

${}_j\nu_2(s)$ — для отдельного цикла ориентации $(j\neq 4)$
${}_jh_2(s)$ — для отдельного цикла обслуживания
${}_j\overline{\pi}_2^{(n)}(s)$ — для отдельного $\overline{\Pi}_2^{(n)}$-периода
${}_j\overline{\pi}_2(s)$ — для отдельного $\overline{\Pi}_2$-периода
${}_j\pi(s)$ — для отдельного периода занятости

Введение

1. В последние годы интенсивно развивается раздел теории массового обслуживания, посвященный исследованию однолинейных систем обслуживания с приоритетами. В существующей литературе по приоритетным системам в основном предполагается, что прибор осуществляет переход от обслуживания требований потока L_i к обслуживанию требований потока $L_j (i \neq j)$ мгновенно. Однако на практике наряду с этим существует и много ситуаций, когда это предположение не выполняется: при переходе от обслуживания требований одного потока к обслуживанию требований другого потока требуется затратить некоторое время на ориентацию, переключение, настройку и т. д. прибора. Системы такого рода будем называть **системами обслуживания с ориентацией**. Примером системы обслуживания с ориентацией может служить ЭВМ, работающая в режиме разделения времени. В таком случае ориентация прибора есть запись данных прерываемой программы и чтение данных очередной программы.

Исследования систем обслуживания с ориентацией актуальны и имеют практическое значение. Тем не менее известно всего лишь небольшое число работ, посвященных изучению различных аспектов систем с ориентацией. Объясняется это, прежде всего, дополнительными трудностями, возникающими при исследовании таких систем. Кроме наличия времени ориентации (что само по себе уже усложняет исследование) необходимо еще учесть и способ ориентации прибора в момент, когда система свободна от вызовов. Фронт исследований в этом направлении весьма широк. Ограничимся рассмот-

рением систем с абсолютным, полуабсолютным, полуотносительным и относительным приоритетом.

В главах 0—5 описываются и исследуются системы $M/G/1$ с ожиданием, наличием времени ориентации (переналадки) прибора и стратегией прибора в свободном состоянии. Длительности ориентации от обслуживания вызовов потока L_i к обслуживанию вызовов потока L_j — случайные величины (сл. в.) с функциями распределения (ф. р.) $C_{ij}(x)$. Рассматриваются следующие три способа ориентации прибора в свободном состоянии: по окончании периода занятости прибор

1) мгновенно «сбрасывает» ориентацию;
2) ориентируется на обслуживание требований приоритета 1;
3) ориентируется на обслуживание требований с большей вероятностью поступления в систему.

Рассматриваются дисциплины абсолютного (и ориентация к обслуживанию и обслуживание прерываются вызовами потока L_1), полуабсолютного (ориентация не прерывается, обслуживание прерывается), полуотносительного (ориентация не прерывается, обслуживание прерывается и относительного приоритета (ни ориентация к обслуживанию, ни обслуживание не прерываются вызовами потока L_1). Прерванный вызов может либо теряться, либо обслуживаться заново с прежней или новой реализацией времени обслуживания, либо дообслуживаться. Прерванная ориентация может также либо доориентироваться, либо осуществляться заново с тем же или новым временем ориентации. Все возможные ситуации (касающиеся дальнейшей судьбы прерванного обслуживания, прерванной ориентации, способа ориентации прибора в свободном состоянии, а также тех случаев, когда обслуживание и ориентация не прерываются) иллюстрируются табл. 1. Комбинация перечисленных возможностей порождает довольно большой класс приоритетных систем обслуживания с ориентацией. Некоторые из таких систем, а именно системы с дисциплиной абсолютного приоритета, обобщаются (гл. 6) на r-приоритетов.

Таблица 1

№ п/п	Ориентация	Обслуживание	Способ ориентации
1	заново	заново	1)
2	дориентация	«потеря» вызова	2)
3	идентично заново	дообслуживание	3)
4	не прерывается	идентично заново	—
5	—	не прерывается	—

2. Одна из важнейших характеристик систем **обслуживания — распределение длины очереди.** Цель работы как раз и состоит в нахождении этой характеристики. Для всех рассматриваемых схем найдено совместное распределение длины очереди в любой момент времени. В процессе работы получены и другие характеристики систем, которые могут иметь и самостоятельное значение, такие, как распределение длины периодов занятости, циклов ориентации, циклов обслуживания и других вспомогательных промежутков, распределение длины очереди на отдельных периодах занятости, отдельных циклах ориентации, отдельных циклах обслуживания и других промежутков. Вычислены первые моменты периодов занятости и вспомогательных промежутков, получены соотношения для длины очереди в стационарном режиме. Кроме того, для некоторых 2-х приоритетных схем найдены нестационарные вероятности состояния прибора. Эти результаты (гл. 5) не имеют непосредственного отношения к нахождению длины очереди, но могут представлять интерес, например, в том случае, когда функционирование системы не может наблюдаться, но необходимо иметь информацию о состоянии прибора в момент времени t. Все результаты получены в терминах преобразования Лапласа — Стилтьеса (Л. — С.), Лапласа и производящих функций.

3. Остановимся коротко на работах по системам обслуживания с ориентацией и приоритетами, предшествующих нашим исследованиям. Будем касаться только работ, в которых рассматривают-

ся однолинейные приоритетные системы с пуассоновскими входами и неограниченным ожиданием. Из имеющихся работ ближе примыкает к нашим исследованиям (по описанию модели) работа Гавера [10], в которой рассматривается система обслуживания типа $M_2/G_2/1$ с ожиданием и ориентацией. Длительности ориентации от $L_1(L_2)$ к $L_2(L_1)$ — сл. в. с ф. р. $C_{12}(x)\,[C_{21}(x)]$. Исследуются три схемы, две из которых основаны на дисциплине абсолютного приоритета. Способ ориентации прибора в свободном состоянии в одном случае принят следующим: а) если прибор освободился от вызова, он не ориентируется, а ожидает поступления вызова (wait and see — «жди и смотри»). В другом случае: б) если система обслужила вызовы потока L_2, то сразу же начинается ориентация от L_2 к L_1 (Look Ahead — «смотри вперед»). Для каждой из трех схем найдена стационарная вероятность застать прибор свободным. Отметим, что способ ориентации б) нами также рассматривается.

В работе [9] изучается одна общая схема (схемы Гавера — частные случаи этой схемы), для которой получены уравнения, определяющие совместное распределение числа вызовов обоих потоков в установившемся режиме. Получено также распределение времени пребывания в системе вызовов обоих потоков в установившемся режиме и вероятность застать систему свободной от вызовов.

Меверт [11] исследовал схемы абсолютного приоритета с идентичным осуществлением заново прерванного обслуживания и несколькими способами ориентации прибора в свободном состоянии, среди которых и способы а) и б) Гавера. Для способа а) найдено распределение времени пребывания вызовов в системе и распределение длины периода занятости (в терминах преобразования Лапласа), а также первые два момента этих характеристик. Для способа б) найдено только распределение времени пребывания вызовов в системе. Работа [12] посвящена нахождению среднего значения виртуального времени ожидания для схем с дообслуживанием, обслуживанием заново и режи-

мом ориентации а). Как в [11], так и в [12] рассматриваемые модели — двухприоритетные.

В работе [13] исследуется система $M_2/G_2/1/\infty$ с относительным приоритетом и наличием времени ориентации прибора внутри периода занятости. В [14] рассматривается система $M_2/G_2/1/\infty$ с ориентацией (внутри периода занятости) и «разогревом», зависящим от типа требования. В установившемся режиме получены (в терминах преобразования Л. — С.) ф. р. времени ожидания начала обслуживания требований потока L_i, средняя длина времени ожидания и средняя длина очереди из требований потока L_i, $i=1, 2)$. В остальных работах по системам с ориентацией рассматриваются другого рода приоритеты, поэтому на них останавливаться не будем.

4. В теории массового обслуживания часто используется приоритетная дисциплина обслуживания заявок. Такая дисциплина часто является оптимальной в классе всех дисциплин, определяющих порядок обслуживания. Это предложение оправдывается приводимыми ниже утверждениями [18, 19].

5. *Описание системы.* Система состоит из конечного множества $\Omega=\{\alpha\}$ фаз обслуживания. У каждой фазы обслуживания допускается неограниченная очередь. Одновременно обслуживание может проходить только на одной фазе (в этом и состоит разделение обслуживания во времени). Прерывание обслуживания на фазе не допускается.

Поступившее требование направляется в очередь фазы $\alpha\in\Omega$ с вероятностью p_α, $\sum\limits_{\alpha\in\Omega} p_\alpha = 1$. Требование, обслуженное на фазе α, направляется в очередь фазы β с вероятностью $p_{\alpha\beta}$; $\sum\limits_{\beta\in\Omega} p_{\alpha\beta} \leqslant 1$ для всех $\alpha\in\Omega$; а с вероятностью $1-\sum\limits_{\beta} p_{\alpha\beta}$ покидает систему.

Входящий поток требований — пуассоновский с интенсивностью a. Длительность обслуживания на фазе $\alpha\in\Omega$ определяется ф. р. B_α. Длительности обслуживания требований на фазах предполагают-

ся независимыми между собой и от входящего потока требований.

Нам осталось лишь определить порядок обслуживания требований, т. е. правило, указывающее по состоянию системы, какое требование и на какой фазе следует обслуживать.

В каждый момент времени очередь в системе характеризуется вектором

$$l=\{l_\alpha,\ \alpha\in\Omega\},$$

где l_α — длина очереди у фазы α в рассматриваемый момент (без учета обслуживаемого требования, если такое имеется). Через L обозначим множество значений, принимаемых l. Элемент $l=\{l_\alpha, \alpha\in\Omega\}$, для которого все $l_\alpha=0$, будем обозначать через 0.

После завершения обслуживания на некоторой фазе выбор очередной фазы обслуживания осуществляется в зависимости от количества $l\in L$, оставшихся в системе требований. Именно пусть каждому $l\in L$, $l\neq 0$, сопоставляется элемент $u(l)\in\Omega$. От отображения

$$0\neq l\mapsto u(l)$$

потребуем лишь, что $u(l)=\alpha$ влечет $l_\alpha\neq 0$.

Если после завершения обслуживания на некоторой фазе количество требований, оставшихся в системе, характеризуется вектором $l\in L$ и $l\neq 0$, то начинается обслуживание на фазе $\alpha=u(l)$. Требование, заставшее систему свободной, сразу же начинает обслуживаться с той фазы, на которую это требование поступило. Требования, ожидающие начала обслуживания на некоторой фазе, обслуживаются в порядке их поступления на эту фазу. Функцию $u=u(l)$, определяющую порядок обслуживания требований в системе, естественно назвать **функцией переключения** (фаз обслуживания).

Таким образом, вся система обслуживания задается набором объектов

$$\Omega;\ p=\{p_\alpha,\ \alpha\in\Omega\};\ P=\{p_{\alpha\beta}\};\ a;\ \{B_\alpha\};\ u.$$

6. *Функция потерь*. Пусть c_α — стоимость ожидания (за единицу времени) у фазы $\alpha \in \Omega$. Положим

$$l(t) = \{l_\alpha(t),\ \alpha \in \Omega\},$$

где $l_\alpha(t)$ — длина очереди у фазы α в момент t (без учета требования, обслуживаемого в момент t, если такое имеется). Если $x_l(t)$ — индикатор события $\{l(t) = l\}$, $l \in L$, и

$$X_l(T) = \int_0^T x_l(t)\,dt,$$

то суммарные потери до момента T равны

$$\sum_{l \in L} (c, l)\, X_l(T),$$

где

$$c = \{c_\alpha,\ \alpha \in \Omega\},\ l = \{l_\alpha,\ \alpha \in \Omega\};\ (c, l) = \sum_{\alpha \in \Omega} c_\alpha l_\alpha.$$

Средние же потери за единицу времени до момента T равны

$$J_T = E\,\frac{1}{T} \sum_{l \in L} (c, l)\, X_l(T) = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{l \in L} (c, l)\, E x_l(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{l \in L} (c, l)\, P\{l(t) = l\}\,dt = \frac{1}{T} \int_0^T (c, El(t))\,dt,$$

где $El(t) = \{El_\alpha(t),\ \alpha \in \Omega\}$. Для стационарного режима средние потери за единицу времени равны

$$J = (c, \bar{l}),$$

где $\bar{l} = \{\bar{l}_\alpha,\ \alpha \in \Omega\}$, а $\bar{l}_\alpha$ есть математическое ожидание длины очереди у фазы α в стационарном режиме.

Обозначим через U множество функций переключения u. Ясно, что потери J зависят от выбранного порядка обслуживания требований в системе, т. е. от функции переключения $u \in U$. Подчеркивая это, будем писать $J = J(u)$.

Рассмотрим следующую задачу:

1) найти условия, при которых существует функция переключения $u^* \in U$, такая, что

$$J(u^*) = \min_{u \in U} J(u)$$

(такую функцию $u^* \in U$ будем называть **оптимальной фукцией переключения**);

2) указать структуру оптимальной функции переключения.

7. *Оптимальный порядок обслуживания.* Сделаем следующие предположения.

П1. Начиная с любой фазы обслуживания каждое требование с положительной вероятностью покидает систему после прохождения конечного числа фаз обслуживания. Формально это означает следующее. Для n-й степени матрицы

положим
$$P = \{p_{ij}\}_{i,j \in \Omega}$$

$$P^n = \{p_{ij}^{(n)}\}_{i,j \in \Omega}.$$

Тогда для каждого $i \in \Omega$ существует целое число $n \geqslant 1$, такое, что

$$1 - \sum_{j \in \Omega} p_{ij}^{(n)} > 0.$$

П2. Первые два момента длительности обслуживания на любой фазе конечны, т. е.

$$\beta_{i1} = \int_0^\infty t dB_i(t) < \infty, \quad \beta_{i2} = \int_0^\infty t^2 dB_i(t) < \infty$$

для всех $i \in \Omega$.

П3. Выполнено условие эргодичности

$$\rho = \sum_{i \in \Omega} \lambda_i \beta_{i1} < 1,$$

где набор $\Lambda = \{\lambda_i, i \in \Omega\}$ определяется системой уравнений

$$\lambda_j = \sum_{i \in \Omega} p_{ij} \lambda_i + a p_j, \quad j \in \Omega,$$

или в матричном виде

$$(I - P')\Lambda = ap,$$

где I — единичная матрица, P' — матрица, транспонированная с P, $p=\{p_i, i\in\Omega\}$. Из П1 следует, что эта система имеет единственное решение Λ.

Пусть $M\subset\Omega$. Обозначим через $\gamma_i(M)$ среднее суммарное время обслуживания требования (без учета ожидания), начиная с фазы $i\in M$ до первого выхода из множества фаз M. В частности, положим $\gamma_i=\gamma_i(\Omega)$. Ясно, что

$$\gamma_i = \Big(1-\sum_{j\in\Omega} p_{ij}\Big)\beta_{i1} + \sum_{j\in\Omega} p_{ij}(\beta_{i1}+\gamma_j) = $$

$$= \sum_{j\in\Omega} p_{ij}\gamma_j + \beta_{i1},$$

или в матричном виде

$$(I-P)\gamma=\beta,$$

где $\gamma=\{\gamma_i, i\in\Omega\}$, $\beta=\{\beta_i, i\in\Omega\}$.

Из П1 следует, что эта система имеет единственное решение γ.

Для любого $M\subset\Omega$ числа $\gamma_i(M)$, $i\in M$ определяются аналогично. Для этого нужно в матрице $I-P$ вычеркнуть столбцы и строки, соответствующие фазам из $\Omega\setminus M$, а в векторах γ и β вычеркнуть компоненты, соответствующие тем же фазам.

Определим последовательно множества

$\Omega_1^*, \ldots, \Omega_s^*$, полагая

$$\Omega_i^* = \left\{\alpha\in\Omega_i : \frac{c_\alpha(\Omega_i)}{\gamma_\alpha(\Omega_i)} = \min_{\beta\in\Omega_i}\frac{c_\beta(\Omega_i)}{\gamma_\beta(\Omega_i)}\right\},\quad i\geqslant 1,$$

где

$$\Omega_1=\Omega;\ c_\alpha(\Omega_1)=c_\alpha;\ \Omega_{i+1}=\Omega_i\setminus(\Omega_1^*+\ldots+\Omega_i^*);$$

$$c_\alpha(\Omega_{i+1}) = \gamma_\alpha(\Omega_i)\left[\frac{c_\alpha(\Omega_i)}{\gamma_\alpha(\Omega_i)} - \min_{\beta\in\Omega_i}\frac{c_\beta(\Omega_i)}{\gamma_\beta(\Omega_i)}\right],$$

$$\alpha\in\Omega_{i+1}.$$

Число $s\geqslant 1$ определяется условием

$$\Omega=\Omega_1^*+\ldots+\Omega_s^*,\ \Omega_s^*\neq\varnothing.$$

Для любой выбранной функции переключения (фаз обслуживания) будем говорить, что фаза $\alpha \in \Omega$ имеет преимущество (или более высокий приоритет) по отношению к фазе β, если в любой момент начала обслуживания требования на фазе β число требований на фазе α равно нулю.

Теорема 1. *Для оптимальности функции переключения* $u^* \in U$ *необходимо и достаточно, чтобы при* $1 \leqslant i < j \leqslant s$ *каждая фаза из* Ω_j^* *имела преимущество по отношению к любой фазе из* Ω_i^*.

8. Как и выше, через $\Omega = \{\alpha\}$ обозначим конечное множество фаз обслуживания. Одновременно обслуживание может проходить только на одной фазе и у каждой фазы допускается неограниченная очередь. Поступление извне требований в очередь каждой фазы управляется независимыми пуассоновскими потоками. Длительности обслуживания требований на фазах предполагаются независимыми между собой и от входящего потока требований. Через B_α обозначим ф. р. длительности обслуживания требования на фазе $\alpha \in \Omega$.

Чтобы для поступившего требования определить последовательность прохождения фаз обслуживания, введем в Ω частичный порядок. Для этого наделим множество Ω структурой ориентированного графа. Предположим, что Ω есть лес, состоящий из однокорневых деревьев, ориентированных к корню. Это означает, что граф Ω не содержит циклов и тем самым распадается на компоненты связности, каждая из которых является деревом; при этом каждое дерево имеет один корень и ориентировано по направлению к этому корню. Корень дерева считается максимальным элементом по отношению к другим вершинам этого же дерева.

Требование, обслуженное на фазе α, направляется в очередь фазы β с вероятностью $p_{\alpha\beta}$; а с вероятностью $1 - \sum\limits_{\beta \in \Omega} p_{\alpha\beta}$ покидает систему. Предполагается, что $p_{\alpha\beta} > 0$ влечет $\alpha < \beta$.

Считаем, что прерывание обслуживания на фазе не допускается. Чтобы окончательно определить функционирование системы, следует еще указать порядок обслуживания требований. Выбор же оптимального (по некоторому критерию) порядка

обслуживания требований составляет цель исследования.

9. Будем считать, что выполнены предположения П2—П3 о конечности первых двух моментов распределений B_α и соблюдений условия эргодичности. Отметим, что предположение П1 выполняется автоматически в силу сделанного предположения о структуре матрицы $P=\{p_{\alpha\beta}\}$.

В этом случае для всякого порядка обслуживания требований, не допускающего простоя системы при наличии в ней требований, существует $\lim\limits_{t\to\infty} El_\alpha(t) = \overline{l}_\alpha$, где $l_\alpha(t)$ — длина очереди у фазы α в момент t (без учета требования, обслуживаемого в момент t, если такое имеется). Если теперь c_α — стоимость ожидания (за единицу времени) в очереди фазы $\alpha\in\Omega$, то

$$J=(c,\overline{l})=\sum_{\alpha\in\Omega} c_\alpha \overline{l}_\alpha$$

есть средние потери за единицу времени в стационарном режиме (для выбранного порядка обслуживания).

10. *Формулировка основного результата.* Пусть γ_α — среднее суммарного времени обслуживания требования (без учета ожидания), начиная с фазы α до выхода из системы. Отметим, что вектор-столбец $\gamma=\{\gamma_\alpha,\ \alpha\in\Omega\}$ определяется через матрицу $P=\{p_{\alpha\beta}\}$ и вектор-столбец

$$\beta=\left\{\beta_{i1}=\int\limits_0^\infty x dB_i(x),\ i\in\Omega\right\}$$

по формуле $\gamma=(I-P)^{-1}\beta$, где I — единичная матрица той же размерности, что и P.

Через $p(\beta/\alpha)$ обозначим вероятность того, что требование, находящееся у фазы α, будет обслужено на фазе β. Отметим, что если в ориентированном лесу Ω не существует пути от α к β, то $p(\beta/\alpha)=0$. В противном случае (т. е. при $\alpha<\beta$), если $[\alpha=\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n=\beta]$ — соответствующий путь, то $p(\beta/\alpha)=p_{\alpha_0\alpha_1}\dots p_{\alpha_{n-1}\alpha_n}$. Конечно, $p(\alpha/\alpha)=1$.

Теорема 2. *Сопоставим каждому требованию, находящемуся у фазы $\alpha \in \Omega$ в рассматриваемый момент, число*

$$R_\alpha = \max_{\beta > \alpha} \left\{ \frac{c_\alpha - c_\beta p(\beta/\alpha)}{\gamma_\alpha - \gamma_\beta p(\beta/\alpha)}, \frac{c_\alpha}{\gamma_\alpha} \right\}, \qquad (1)$$

называемое приоритетным индексом этого требования. Тем самым каждому требованию, находящемуся в системе в рассматриваемый момент, сопоставлен приоритетный индекс. Тогда оптимальный порядок обслуживания требований (минимизирующий функционал J) заключается в предоставлении преимущества требованию с максимальным приоритетным индексом.

В частности, если

$$\alpha < \gamma \text{ влечет } \frac{c_\alpha}{\gamma_\alpha} \leqslant \frac{c_\beta}{\gamma_\beta}, \qquad (2)$$

то

$$R_\alpha = c_\alpha / \gamma_\alpha \text{ для всех } \alpha \in \Omega. \qquad (3)$$

Отметим, что $\gamma_\alpha - \gamma_\beta p(\beta/\alpha) \geqslant \beta_{\alpha 1} = \int\limits_0^\infty x dB_\alpha(x) > 0.$

Кроме того, если

$$\alpha < \beta \text{ влечет } p(\beta/\alpha) > 0,$$

то из (3) следует (2).

11. В общем случае, т. е. в предположениях п. 5, оптимальный порядок обслуживания определяется приоритетными индексами

$$R_\alpha = \max_{M \ni \alpha} \frac{c_\alpha - \sum\limits_{\beta \notin M} p_{\alpha\beta}(M) c_\beta}{\gamma_\alpha(M)}, \quad \alpha \in \Omega$$

(максимум берется по всем подмножествам $M \subseteq \Omega$, содержащим $\alpha \in \Omega$), где $p_{\alpha\beta}(M)$ — вероятность перехода из $\alpha \in M$ в $\beta \notin M$ после выхода из множества состояний M, $\gamma_\alpha(M)$ — среднее суммарного времени обслуживания требования (без учета ожидания), начиная с фазы $\alpha \in M$ до первого выхода из множества фаз M. Отметим, что числитель есть математическое ожидание изменения штрафа

(стоимости ожидания), начиная с фазы $\alpha \in \overline{M}$ после выхода из множества фаз M.

Если Ω — направленный лес, то теорема означает, что максимум достаточно брать по меньшей совокупности множеств M.

12. Пример 1. В систему обслуживания поступает r независимых пуассоновских потоков заявок. Заявки i-го потока последовательно проходят обслуживание на i-й цепочке приборов. У каждого прибора допускается неограниченное ожидание; в каждый момент обслуживание происходит не более чем на одном приборе; прерывание обслуживания на приборе не допускается. Пусть c_{ij} — стоимость ожидания за единицу времени у (i, j)-го прибора, т. е. у j-го прибора i-й цепочки; τ_{ij} — среднее время обслуживания на (i, j)-м приборе.

Предположим, что для каждого i выполнено $c_{i1} \leqslant c_{i2} \leqslant \ldots$. Сопоставим каждой заявке, находящейся в очереди у (i, j)-го прибора, приоритетный индекс

$$R_{ij} = c_{ij} / \sum_{k \geqslant j} \tau_{ik}.$$

Тогда оптимальный порядок обслуживания заявок (минимизирующий средние потери в единицу времени в стационарном режиме) заключается в предоставлении преимущества заявкам с максимальным приоритетным индексом.

Действительно, в данном случае $\Omega = \{\alpha = (i, j)\}$, где индексы i и j соответствуют (i, j)-му прибору. Множество Ω частично упорядочено, а именно пара $\alpha = (i, j)$ и $\beta = (k, l)$ сравнима, если и только если $k = i$; в этом случае $\alpha < \beta$, если $j < l$. Так как $\alpha < \beta$ в силу сделанного предположения относительно $\{c_{ij}\}$ влечет $c_\alpha \leqslant c_\beta$, а $\gamma_\alpha = \sum_{k \geqslant j} \tau_{ik}$, если $\alpha = (i, j)$, то $\alpha < \beta$ влечет $c_\alpha / \gamma_\alpha \leqslant c_\beta / \gamma_\beta$. Согласно теореме 2 в этом случае имеем

$$R_\alpha = \frac{c_\alpha}{\gamma_\alpha} = c_{ij} / \sum_{k \geqslant j} \tau_{ik} \quad \text{при } \alpha\,(i, j).$$

13. Пример 2. Будем теперь считать, что с вероятностью q_{ij} заявка i-го потока проходит обслуживание лишь на первых j приборах i-й цепочки; $\sum\limits_{j\geqslant 1} \bar{q}_{ij}$. Монотонность c_{ij} по j, как в примере 1, не предполагается. Положим $q_{ij} = \sum\limits_{k\geqslant j} \bar{q}_{ik}$. В этом случае приоритетный индекс заявки, находящейся у (i, j)-го прибора, есть

$$R_{ij} = \max_{s\geqslant j} \frac{c_{ij}q_{ij} - c_{is+1}q_{is+2}}{\sum\limits_{i=j}^{s} \tau_{ik}q_{ik}}. \qquad (4)$$

Здесь предполагается, что если (i, n_i) — последний прибор i-й цепочки, то $q_{ij}=0$ при $j>n_i$, а c_{ij} при $j>n_i$ может быть выбрано произвольно.

Действительно, если $\alpha=(i, j)$, $\beta=(i, j+1)$, то $p_{\alpha\beta} = q_\beta/q^\gamma$; в остальных случаях $p_{\alpha\beta} = 0$. Кроме того, при $\alpha<\beta$ имеем

$$p(\beta/\alpha) = \frac{q_\beta}{q_\alpha}, \quad \gamma_\alpha = \frac{1}{q_{ij}} \sum_{k\geqslant j} \tau_{ik}q_{ik}, \quad \alpha = (i, j),$$

$$\gamma_\alpha - \gamma_\beta p(\beta/\alpha) = \frac{1}{q_{ij}} \sum_{k=j}^{s} \tau_{ik}q_{ik} \text{ при } \alpha = (i, j),$$

$$\beta = (i, s+1), \; j \leqslant s.$$

Остается воспользоваться теоремой 2.

14. Пример 3. В систему обслуживания поступает r независимых пуассоновских потоков заявок. Для обслуживания заявки i-го потока требуется случайное время, подчиненное распределению $B_i(x)$. В каждый момент может обслуживаться лишь одна заявка. Прерывание обслуживания любой заявки допускается лишь через кванты времени его обслуживания длины h. Пусть $c_i(t)$ — стоимость ожидания за единицу времени для (i, t)-заявки, т. е. заявки i-го потока, уже обслуженной t единиц времени. Предположим, что длительность обслуживания кратна h и ограничена (с вероятностью 1) некоторой константой.

Такая система сводится к системе предыдущего примера, если положить

$$\tau_{ij} = h,\ \bar{q}_{ij} = B_i(ih) - B_i(jh - h),\ c_{ij} = c_i(jh - h),$$

а оптимальный порядок обслуживания заявок задается приоритетными индексами (4). Так как

$$q_{ij} = 1 - B_i(jh - h),\ \sum_{k=j}^{s} \tau_{ik} q_{ik} = \sum_{k=j}^{s} [1 - B_i(kh - h)]\, h,$$

то

$$R_{ij} = \max_{s \geqslant j} \frac{c_i(jh - h)[1 - B_i(jh - h)] - c_i(sh)[1 - B_i(sh)]}{\sum_{k=j}^{s} [1 - B_i(kh - h)]\, h}.$$

Если $h \downarrow 0$ так, что $jh - h = t$, то правая часть стремится к

$$R_i(t) = \sup_{x > t} \frac{c_i(t)[1 - B_i(t)] - c_i(x)[1 - B_i(x)]}{\int_t^x [1 - B_i(u)]\, du}.$$

Таким образом, если $(i,\ t)$-заявке сопоставить приоритетный индекс $R_i(t)$, то оптимальный порядок обслуживания для описанной системы с прерыванием заключается в предоставлении преимущества заявкам с максимальным приоритетным индексом.

В частности, если $\gamma_i(t)$ есть среднее время дообслуживания $(i,\ t)$-заявки и для всякого i функция $c_i(t)/\gamma_i(t)$ по t не убывает, то

$$R_i(t) = c_i(t)/\gamma_i(t).$$

Так будет, если $\gamma_i(t)$ убывает по t (т. е. чем больше времени заявка обслуживалась, тем в среднем меньше осталось до конца ее обслуживания), а $c_i(t)$ не убывает по t.

Может, однако, случиться, что в системе одновременно находятся $(i_1,\ t_1)$-заявка и $(i_1,\ t_2)$-заявка, причем $R_{i_1}(t_1) = R_{i_2}(t_2)$ и функции $R_{i_1}(t)$ и $R_{i_2}(t)$ имеют строгий локальный максимум в точках t_1 и t_2 соответственно. Тогда порядок обслуживания заявок по максимальному приоритетному индексу

неосуществим. Этого, конечно, не может быть, если значения локальных максимумов для разных функций $R_i(t)$ различны.

15. Пример 4. Для системы обслуживания, описанной в пункте 8, прерывание обслуживания на каждой фазе не допускалось. Пусть теперь $\Omega=\Omega_0+\Omega_1$, прерывание не допускается на фазах обслуживания из Ω_1 и допускается на фазах обслуживания из Ω_0. Рассмотрим заявку, которая находится у фазы $\alpha\in\Omega_1$ и уже обслуживалась на этой фазе в течение $t\geqslant 0$ единиц времени. Такую заявку назовем (α, t)-заявкой. Пусть $c_\alpha(t)$ — стоимость ожидания в единицу времени для (α, t)-заявки, а $\gamma_\alpha(t)$ — среднее время обслуживания (α, t)-заявки до выхода ее из систем. Чтобы получаемые ниже формулы записывались более компактно, будем говорить об (α, t)-заявках и при $\alpha\in\Omega_0$. Только в этом случае t принимает единственное значение $t=0$, а также $c_\alpha(t)=c_\alpha$, $\gamma_\alpha(t)=\gamma_\alpha$. Таким образом, всегда

$$(\alpha, t)\in\Omega^*=\Omega_0\times\{0\}+\Omega_1\times[0, \infty).$$

Частичный порядок в Ω^* вводится естественным образом, а именно $(\alpha, t)\leqslant(\beta, x)$ равносильно $\alpha<\beta$ или $\alpha=\beta$ и $t\leqslant x$.

Сопоставим (α, t)-заявке приоритетный индекс

$$R_\alpha(t)=\sup_{(\beta,x)>(\alpha,t)}\left\{\frac{c_\alpha(t)-c_\beta(x)\,p(\beta/\alpha)}{\gamma_\alpha(t)-\gamma_\beta(x)\,p(\beta/\alpha)},\ \frac{c_\alpha(t)}{\gamma_\alpha(t)}\right\}.$$

Тогда оптимальный порядок обслуживания заявок (минимизирующий средние потери за единицу времени в стационарном режиме) заключается в предоставлении преимущества заявкам с максимальным приоритетным индексом. Рассуждения, используемые в этом случае, такие же, как в примере 3.

В частности, если $P=0$, то

$$R_\alpha(t)=\sup_{x>t}\frac{c_\alpha(t)[1-B_\alpha(t)]-c_\alpha(x)[1-B_\alpha(x)]}{\int\limits_t^x[1-B_\alpha(u)]\,du}$$

при $\alpha\in\Omega_1$,

$$R_\alpha=c_\alpha/\gamma_\alpha \text{ при } \alpha\in\Omega_0.$$

Глава 0

ОПИСАНИЕ И КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

§ 1 ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

В однолинейную систему массового обслуживания с ожиданием поступают два независимых пуассоновских потока вызовов L_1, L_2 с параметрами a_1 и a_2. Длительности обслуживания вызовов потока L_i есть сл. в. B_i с ф. р. $B_i(x)$, $i=1, 2$. Прибор одновременно может обслужить не более одного вызова, причем, если прибор обслужил вызов потока $L_1(L_2)$, то, для того чтобы он мог начать обслуживание вызова потока $L_2(L_1)$, требуется затратить случайное время $C_{12}(C_{21})$ на ориентацию (переналадку) прибора. Длительности ориентации суть сл. в. с ф. р. $C_{21}(x)$ и $C_{12}(x)$ для вызовов потока L_1 и L_2 соответственно. Предположим, что длительности времен обслуживания и длительности времен ориентации прибора независимы в совокупности и что их математические ожидания существуют и конечны.

Вызовы потока L_i будем еще называть вызовами приоритета i, $i=1, 2$ и говорить, что вызовы потока L_1 имеют более высокий приоритет по отношению к вызовам потока L_2. Будем считать, что вызовы потока L_1 имеют преимущество перед вызовами потока L_2, заключающееся в следующем. Во-первых, среди вызовов, ожидающих обслуживание, вызовы потока L_1 обслуживаются раньше вызовов потока L_2. Во-вторых, если во время ориентации к обслуживанию или во время обслуживания некоторого вызова потока L_2 поступает вызов потока L_1, то возможны случаи когда:

1) и ориентация к обслуживанию и обслуживание прерываются вызовом потока L_1;
2) ориентация не прерывается, обслуживание прерывается вызовом потока L_1;

3) ориентация прерывается, обслуживание не прерывается;
4) ни ориентация к обслуживанию, ни обслуживание не прерываются вызовами потока L_1.

В случае 1) будем говорить, что вызовы потока L_1 обладают абсолютным приоритетом, в случае 2) — полуабсолютным, в случае 3) — полуотносительным и в случае 4) — относительным. После прерывания сразу же начинается ориентация к обслуживанию и обслуживание вызова потока L_1. В связи с судьбой прерванного вызова (прерванной ориентации) будем рассматривать различные дисциплины ориентации и обслуживания. Они описаны в § 2.

Отметим следующее. Две системы обслуживания с ориентацией, идентичные с точки зрения дисциплины ориентации и обслуживания, могут быть различными с точки зрения их функционирования. Убедиться в этом нетрудно, если рассмотреть две системы, идентичные в указанном смысле, но отличающиеся по «стратегии» прибора в моменты, когда система свободна от вызовов. Таким образом, для полного описания системы обслуживания с ориентацией необходимо еще указать способ ориентации прибора в момент, когда система свободна от вызовов. Способ ориентации прибора в момент, когда система свободна от вызовов, будем еще называть режимом ориентации. Рассматриваемые режимы указаны в § 3.

§ 2

ДИСЦИПЛИНЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ И ОРИЕНТАЦИИ

Будем рассматривать следующие схемы обслуживания с преимуществом.

Абсолютный приоритет

Схема 1.1. а) Если во время ориентации прибора от L_1 к L_2 ($1 \to 2$) поступает вызов потока L_1,

то ориентация ($1 \to 2$) прерывается и сразу же начинается ориентация прибора от L_2 к L_1 ($2 \to 1$). Когда система освободится от вызовов потока L_1, прерванная ориентация ($1 \to 2$) начинается заново (с новой реализацией времени ориентации);

б) Если во время обслуживания вызова потока L_2 поступает вызов потока L_1, то обслуживание прерывается, сразу начинается ориентация ($2 \to 1$) и затем идет обслуживание вызова, приведшего к прерыванию. Как только система освободится от вызовов потока L_1, начинается ориентация ($1 \to 2$). Когда ориентация ($1 \to 2$) доведена до конца, обслуживание прерванного вызова начинается заново (с новой реализацией времени обслуживания).

Схема 1.2. а) то же, что и а) схемы 1.1;
б) то же, что и б) схемы 1.1, но вызов с прерванным обслуживанием «теряется».

Схема 1.3. а) то же, что и а) схемы 1.1;
б) то же, что и б) схемы 1.1, но вызов с прерванным обслуживанием дообслуживается в оставшееся время.

Схема 1.4. а) то же, что и а) схемы 1.1;
б) то же, что и б) схемы 1.1, но обслуживание прерванного вызова начинается заново с прежней реализацией времени обслуживания (идентичное обслуживание заново).

Схема 2.1. а) то же, что и а) схемы 1.1, но прерванная ориентация ($1 \to 2$) дооριентируется оставшееся время;
б) то же, что и б) схемы 1.1.

Схема 2.2. а) то же, что и а) схемы 2.1;
б) то же, что и б) схемы 1.2.

Схема 2.3. а) то же, что и а) схемы 2.1;
б) то же, что и б) схемы 1.3.

Схема 2.4. а) то же, что а) схемы 2.1;
б) то же, что и б) схемы 1.4.

Схема 3.1. а) то же, что и а) схемы 1.1, но прерванная ориентация ($1 \to 2$) осуществляется заново с прежней

реализацией времени ориентации (идентичная ориентация заново);
б) то же, что и б) схемы 1.1.

Схема 3.2. а) то же, что и а) схемы 3.1;
б) то же, что и б) схемы 1.2.

Схема 3.3. а) то же, что и а) схемы 3.1;
б) то же, что и б) схемы 1.3.

Схема 3.4. а) то же, что и а) схемы 3.1;
б) то же, что и б) схемы 1.4.

Полуабсолютный приоритет

Схема 4.1. а) Если во время ориентации (1→2) поступает вызов потока L_1, то ориентация (1→2) не прерывается. После того как ориентация (1→2) доведена до конца, начинается ориентация (2→1) и затем обслуживание вызова потока L_1. Когда система свободна от вызовов потока L_1, начинается ориентация (1→2) и ситуация повторяется, пока прибор не будет готов приступить к обслуживанию вызова потока L_2;
б) то же, что и б) схемы 1.1.

Схема 4.2. а) то же, что и а) схемы 4.1;
б) то же, что и б) схемы 1.2.

Схема 4.3. а) то же, что и а) схемы 4.1;
б) то же, что и б) схемы 1.3.

Схема 4.4 а) то же, что и а) схемы 4.1;
б) то же, что и б) схемы 1.4.

Полуотносительный приоритет

Схема 1.5. а) то же, что и п. а) схемы 1.1;
б) обслуживание вызова потока L_2 не прерывается поступившим вызовом потока L_1.

Схема 2.5. а) то же, что и а) схемы 2.1;
б) то же, что и б) схемы 1.5.

Схема 3.5. а) то же, что и а) схемы 3.1;
б) то же, что и б) схемы 1.5.

Относительный приоритет

Схема 4.5. а) то же, что и а) схемы 4.1;
б) то же, что и б) схемы 1.5.

§ 3
РЕЖИМЫ ОРИЕНТАЦИИ ПРИБОРА В СВОБОДНОМ СОСТОЯНИИ

Режим I. Как только система становится свободной от вызовов, прибор осуществляет «сбрасывание» ориентации. «Сброс» производится мгновенно. Таким образом, при поступлении в свободную систему вызова любого приоритета, прежде чем прибор приступит к его обслуживанию, необходима ориентация прибора. При этом будем считать, что время ориентации прибора из «нулевого» состояния к L_1 $(0 \to 1)$ и «нулевого» состояния к L_2 $(0 \to 2)$ соответственно равно времени ориентации $(2 \to 1)$ и $(1 \to 2)$.

Режим II. Если система освободилась от вызовов и последний обслуженный вызов был вызовом приоритета 2, то тут же начинается ориентация $(2 \to 1)$. Таким образом, если вызов, поступивший в свободную от вызовов систему, является вызовом приоритета 2, то сперва происходит ориентация $(1 \to 2)$, а уже затем начинается его обслуживание; если же этот вызов есть вызов приоритета 1, то его обслуживание начинается немедленно. Может случиться, что в процессе ориентации $(2 \to 1)$ (начавшейся после освобождения системы от вызовов) в свободную систему поступают вызовы приоритета 2. В таком случае ориентация $(2 \to 1)$ не прерывается. После ее завершения начинается ориентация $(1 \to 2)$ и затем идёт обслуживание поступивших вызовов приоритета 2.

Режим III. После освобождения системы от вызовов прибор сразу же ориентируется к обслуживанию вызова с большей вероятностью поступления в систему. Так, если p_i — вероятность поступления в свободную систему вызова потока L_i, $i=1, 2$ и $p_2 > p_1$, то перед началом очередного периода занятости прибор будет иметь ориентацию $(1 \to 2)$.

Следуя Гаверу [10] (см. введение, п. 3), режим II будем называть «смотри вперед». Режимы I и III, по аналогии, назовем «сброс в нуль» и «жди наивероятного».

§ 4
ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Обозначим через $P_m(t)$ вероятность того, что в момент времени t в системе находятся $m=(m_1, m_2)$ вызовов, где m_i — число вызовов приоритета i, $i=1, 2$. Пусть

$$P(z, t)=\sum_{m\geqslant 0} P_m(t) z^m,$$

где $z=(z_1, z_2)$, $z^m=z_1^{m_1}z_2^{m_2}$, $0\leqslant z_i\leqslant 1$;

$$p(z, s)=\int_0^\infty e^{-st}P(z, t)\,dt.$$

Для схем § 2 и режимов I—III ищем преобразование Лапласа $p(z, s)$ производящей функции совместного распределения числа вызовов каждого приоритета, находящихся в системе в любой момент времени. Предполагается, что в начальный момент система свободна от вызовов. Попутно будут получены и такие важные характеристики систем, как распределение циклов ориентации, циклов обслуживания, периодов занятости и других вспомогательных промежутков, первые моменты этих величин, соотношения для длины очереди в стационарном режиме и др.

Отметим, что схемы с абсолютным приоритетом и режимом ориентации «сброс в нуль» обобщаются на r-приоритетов (гл. 6), в связи с чем постановка задачи для этих схем будет сформулирована отдельно. Отдельно будет сформулирована постановка задачи также и для гл. 5.

Для дальнейшего изложения удобно разбить совокупность всех систем на два класса: к одному классу отнесем все системы с абсолютным и полуабсолютным приоритетом, ко второму — с полуотносительным и относительным приоритетом. Каждый класс будем разбивать на три подкласса — по режиму ориентации прибора в свободном состоянии.

§ 5
ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Условимся прежде всего относительно следующей терминологии. Будем говорить, что прибор свободен, если в данный момент он не занят ни ориентацией, ни обслуживанием; система свободна в некоторый момент, если в этот момент в системе нет вызовов и прибор свободен. В некоторый момент система может быть свободна от вызовов, но в этот момент прибор может быть занятым ориентацией (режимы II и III). Поэтому выражения «система свободна» и «система свободна от вызовов» будем отличать друг от друга как имеющие различный смысл. Определим основные типы промежутков, встречающихся при изучении рассматриваемого класса систем, и введем обозначения, годные для всех схем.

Цикл ориентации. Начинается с момента начала ориентации прибора к обслуживанию вызова приоритета 2; заканчивается сразу, как только прибор готов приступить к обслуживанию этого вызова. Длительность цикла ориентации есть сл. в. N_2 с ф. р. $N_2(x)$, преобразование Л. — С. которой $\nu_2(s)$.

Цикл обслуживания. Начинается с момента начала обслуживания вызова приоритета 2; заканчивается сразу, как только система освободится от этого вызова, вызовов потока L_1 и прибор готов приступить к обслуживанию другого вызова потока L_2. Длительность цикла обслуживания есть сл. в. H_2 с ф. р. $H_2(x)$, преобразование Л. — С. которой $h_2(s)$.

Π_1-период. Начинается с момента начала ориентации (2→1) при поступлении в свободную систему вызова приоритета 1; заканчивается сразу, как только система освободится от вызовов приоритета 1. Длительность Π_1-периода есть сл. в. Π_1 с ф. р. $\Pi_1(x)$, преобразование Л. — С. которой $\pi_1(s)$.

Π_{2k}-период. Начинается с момента поступления вызова приоритета в свободную систему; заканчи-

вается сразу, как только система освободится от вызовов приоритета 1 и 2. Длительность Π_{2k} периода есть сл. в. Π_{2k} с ф. р. $\Pi_{2k}(x)$, преобразование Л. — С. которой $\pi_{2k}(s)$ $(k=1, 2)$.

$\overline{\Pi}_k$-период. Начинается с момента поступления вызова приоритета k в свободную и ориентированную $(j \to k)$ систему; заканчивается сразу, как только система освободится от вызовов приоритета k. Длительность $\overline{\Pi}_k$-периода есть сл. в. $\overline{\Pi}_k$ с ф. р. $\overline{\Pi}_k(x)$, преобразование Л. — С. которой $\overline{\pi}_k(s)$ $(k, j=1, 2; k \neq j)$.

$\overline{\Pi}_k^{(n)}$-период. Начинается с момента первого поступления на прибор одного из n имеющихся вызовов приоритета k; заканчивается сразу, как только система освободится от вызовов приоритета k. Длительность $\overline{\Pi}_k^{(n)}$ -периода есть сл. в. $\overline{\Pi}_k^{(n)}$ с ф. р. $\overline{\Pi}_k^{(n)}(x)$ преобразование Л. — С. которой $\overline{\pi}_k^{(n)}(s)$.

Период занятости системы. Начинается с момента поступления вызова в свободную систему; заканчивается, как только снова система свободна. Длительность периода занятости есть сл. в. П с ф. р. $\Pi(x)$, преобразование Л. — С. которой $\pi(s)$.

Для систем с режимом ориентации «сброс в нуль» (а также для обычных приоритетных систем) данное определение совпадает с общепринятым определением периода занятости: период занятости — это промежуток времени, начинающийся с момента поступления вызова в свободную от вызовов систему до момента, когда система вновь становится свободной от вызовов.

Φ_j-период. Начинается с момента начала ориентации $(i \to j)$ в предположении, что в момент начала ориентации система свободна (коротко будем писать $(i \to j)^0$); заканчивается, когда ориентация $(i \to j)$ закончена и система свободна от вызовов $(i, j=1, 2; i \neq j)$. Длительность Φ_j-периода есть сл. в. Φ_j с ф. р. $\Phi_j(x)$, преобразование Л. — С. которой $\varphi_j(s)$.

$\Pi_{2k}^{[j]}$ -период. Начинается с момента поступления вызова приоритета k в свободную систему при

условии, что в свободном состоянии прибор ориентирован на обслуживание вызова потока L_j; заканчивается моментом, когда система вновь освободилась от вызовов и прибор закончил ориентацию $(i \to j)$ $(i, j=1, 2;\ i \neq j)$. Длительность $\Pi_{2k}^{[j]}$-периода есть сл. в $\Pi_{2k}^{[j]}$ с ф. р. $\Pi_{2k}^{[j]}(x)$, преобразование Л. — С. которой $\pi_{2k}^{[j]}(s)$.

Вообще всюду сл. в. обозначаются большими буквами греческого или латинского алфавита: B_k, N_2, $\Pi, \ldots$; ф. р. сл. в. обозначаются теми же буквами: $B_k(x) = P\{B_k < x\}$, $N_2(x)$, $\Pi(x), \ldots$; преобразование Л. — С. ф. р. — соответствующими малыми буквами:

$$\beta_k(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dB_k(x),\ \ \nu_2(s),\ \ \pi(s), \ldots;$$

моменты первого порядка — теми же малыми буквами, снабженными индексом 1:

$$\beta_{k1} = \int_0^\infty x dB_k(x),\ \ \nu_{21},\ \pi_1, \ldots .$$

В дальнейшем вместо слов «вызов приоритета k» и «вероятность чего есть...» будем писать «a_k-вызов» и $<\ldots>$.

Длина определенных промежутков и длина очереди, очевидно, не зависят от порядка обслуживания вызовов одного и того же приоритета. Для вызовов одного приоритета порядок обслуживания будем полагать инверсионным.

При выводе соотношений широко будет использоваться метод введения дополнительного события [1] (см. также допол. 2 § 3). Согласно этому методу функционирование систем всюду будем рассматривать на фоне «катастроф». Предполагается, что «катастрофы» происходят независимо от функционирования системы и моменты их наступления образуют пуассоновский поток с параметром $s > 0$.

Глава 1

ПЕРИОДЫ ЗАНЯТОСТИ. АБСОЛЮТНЫЙ И ПОЛУАБСОЛЮТНЫЙ ПРИОРИТЕТ

§ 1 ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

В настоящей и следующей главах будут получены в терминах преобразования Л. — С. распределение длины периодов занятости для всех схем и режимов модели § 1 гл. 0. Эти соотношения потребуются для получения распределения длины очереди (гл. 3 и 4) и вероятностей состояний прибора (гл. 5), но они могут представлять и самостоятельный интерес. Попутно будут получены и распределения всевозможных вспомогательных промежутков (таких, как цикл обслуживания, цикл ориентации, Π_k-период и т. д.), которые также могут иметь и самостоятельное значение. Кроме того, вычислены первые моменты периодов занятости и вспомогательных промежутков.

Во всех леммах § 2 и 3 будет фигурировать $\bar{\pi}^1(s)$-преобразование Л. — С. $\bar{\Pi}_1$-периода, т. е. промежутка времени, начинающегося с момента поступления a_1-вызова в свободную и ориентированную (2→1) систему и заканчивающегося сразу, как только система освободится от a_1-вызовов. Покажем, что $\bar{\pi}_1(s)$ определяется из функционального уравнения

$$\bar{\pi}_1(s) = \beta_1(s + a_1 - a_1\bar{\pi}_1(s)). \qquad (1.1)$$

Пусть независимо от функционирования системы происходят «катастрофы», поток которых пуассоновский с параметром $s>0$. Преобразование Л. — С.-ф. р. $\bar{\Pi}_1(t)$

$$\bar{\pi}_1(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, d\bar{\Pi}_1(t)$$

можно интерпретировать как вероятность того, что за длительность $\overline{\Pi}_1$-периода не произошло «катастрофы». Далее, с каждым a_1-вызовом будем связывать (порядок обслуживания — инверсионный) промежуток времени, начавшийся с момента начала его обслуживания и заканчивающийся сразу, как система освободится от a_1-вызовов, поступивших после него. Такой промежуток будем называть $\overline{\Pi}_1$-периодом, связанным с данным вызовом. С другой стороны, вероятность того, что за длительность $\overline{\Pi}_1$-периода не произошло «катастрофы», равна

$$\sum_{n\geqslant 0} \overline{\pi}_1^{(n)}(s) \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_1 t)^n}{n!} e^{-a_1 t}\, dB_1(t). \tag{1.2}$$

Действительно, для этого необходимо и достаточно, чтобы за длительность обслуживания первого вызова, открывшего $\overline{\Pi}_1$-период $\langle dB_1(t)\rangle$ не произошло «катастрофы» $\langle e^{-st}\rangle$, за это время поступило $n\geqslant 0$ a_1-вызовов $\left\langle \frac{(a_1 t)^n}{n!} e^{-a_1 t}\right\rangle$ и не произошло «катастрофы» за $\overline{\Pi}_1^{(n)}$-период $\langle \overline{\pi}_1^{(n)}(s)\rangle$. Очевидно, $\overline{\Pi}_1^{(n)}$- период складывается из n независимых $\overline{\Pi}_1$-периодов. Следовательно,

$$\overline{\pi}_1^{(n)} = [\overline{\pi}_1(s)]^n. \tag{1.3}$$

Подставляя (3) в (2), произведя суммирование под интегралом, а затем интегрирование, получаем (1.1).

§ 2
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЦИКЛОВ ОРИЕНТАЦИИ

Получим преобразования Л. — С. ф. р. длительностей циклов ориентации. Пусть $c_{ij}(s)$ — преобразования Л. — С. ф. р. $C_{ij}(x)$ длительностей ориентации $(i\to j)$ $(i, j=1, 2;\ i\neq j)$.

Лемма 1.1. *Для схем 1.1—1.4 преобразование Л. — С. ф. р.* $N_2(t)$ *определяется из соотношения*

$$\nu_2(s) = c_{12}(s+a_1)\left\{1 - \frac{a_1}{s+a_1}[1 - c_{12}(s+a_1)] \times \right.$$

$$\left. \times c_{21}(s + a_1[1 - \bar{\pi}_1(s)])\,\pi_1(s)\right\}^{-1}.$$

Если $a_1\beta_{11} < 1$, то

$$\nu_{21} = \left\{\frac{1}{a_1} + \frac{c_{211} + \beta_{11}}{1 - a_1\beta_{11}}\right\}\left[\frac{1}{c_{12}(a_1)} - 1\right].$$

Доказательство. ◑ Для рассматриваемых схем цикл ориентации имеет следующую структуру. Либо за длительность ориентации (1→2) не поступают a_1-вызовы и цикл ориентации заканчивается завершением ориентации (1→2), либо ориентация (1→2) прерывается поступлением a_1-вызова, после чего начинается Π_1-период, с завершением которого ориентация (1→2) начинается заново. Промежуток времени, необходимого для осуществления ориентации (1→2), при условии, что ориентация (1→2) была доведена до конца без прерываний, назовем концевым промежутком ориентации. Промежуток времени, начинающийся с момента начала ориентации (1→2) и заканчивающийся непосредственно моментом первого пребывания — неконцевым. Пусть $C_{12}^{k}(x)$ и $C_{12}^{\text{н}}(x)$ — условные ф. р. этих промежутков, $c_{12}^{k}(s)$ и $c_{12}^{\text{н}}(s)$ — их преобразования Л. — С. Можно показать, что

$$c_{12}^{k}(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{-a_1 t}\, dC_{12}(t) = c_{12}(s + a_1), \quad (1.4)$$

$$c_{12}^{\text{н}}(s) = \int_0^\infty e^{-su}[1 - C_{12}(u)]\, a_1 e^{-a_1 u}\, du =$$

$$= \frac{a_1}{s + a_1}[1 - c_{12}(s + a_1)]. \quad (1.5)$$

Действительно, для того чтобы за концевой (неконцевой) промежуток ориентации не произошло «катастрофы» $\langle c_{12}^{k}(s)\rangle$ $(\langle c_{12}^{\text{н}}(s)\rangle)$, необходимо и достаточно, чтобы за длительность ориентации (1→2) $< dC_{12}(t) >$ не произошло «катастрофы» $< e^{-st} >$.

и не поступило a_1-вызовов $< e^{-a_1 t} >$ (в промежутке $[u, u+du]$), когда ориентация $(1 \to 2)$ еще не завершена $< 1 - C_{12}(u) >$, поступил a_1-вызов $< a_1 du >$, до этого момента не произошло «катастрофы» $< e^{-su} >$ и не было a_1-вызовов $< e^{-a_1 u} >$).

Обозначим через M промежуток времени, начинающийся с момента начала ориентации $(1 \to 2)$ и заканчивающийся сразу, как только система стала свободной от a_1-вызовов, в предположении, что за длительность ориентации $(1 \to 2)$ поступил a_1-вызов. Пусть $M(t)$ ф. р. этого промежутка. Докажем соотношение

$$\nu_2(s) = c_{12}^{k}(s) + \mu(s)\, \nu_2(s). \tag{1.6}$$

Пусть за цикл ориентации не произошло «катастрофы» $< \nu_2(s) >$.

Для этого необходимо и достаточно, чтобы либо имел место концевой промежуток ориентации и за время его осуществления не произошло «катастрофы» $\langle c_{12}^{k}(s) \rangle$; либо имел место промежуток M, за него не произошло «катастрофы» $< \mu(s) >$, после чего ориентация $(1 \to 2)$ начинается заново, и нужно, чтобы за цикл ориентации не произошло «катастрофы» $< \nu_2(s) <$.

Аналогично можно убедиться в справедливости соотношений

$$\mu(s) = c_{12}^{\text{н}}(s)\, \pi_1(s), \tag{1.7}$$

$$\pi_1(s) = c_{21}(s + a_1[1 - \bar{\pi}_1(s)])\, \bar{\pi}_1(s). \tag{1.8}$$

Соотношение (1.7) очевидно. Соотношения (1.8) следует из записи

$$\pi_1(s) = \sum_{n \geq 0} \bar{\pi}_1^{(n+1)}(s) \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{(a_1 t)^n}{n!} e^{-a_1 t}\, dC_{21}(t),$$

которая доказывается точно такими же рассуждениями, что и (1.2). Здесь $\bar{\Pi}_1^{(n+1)}$ -период насчитывает $n+1$ начальных вызовов, так как кроме поступивших за длительность ориентации $(2 \to 1)$ n a_1-вызовов в системе присутствует еще и a_1-вызов, породивший Π_1-период. Воспользуясь тем, что

$\bar{\pi}_1^{(n+1)}(s) = [\bar{\pi}_1(s)]^n \bar{\pi}_1(s)$, внеся $[\bar{\pi}_1(s)]^n$ под интеграл и проведя суммирование и интегрирование, получаем (1.8). Подставляем далее (1.5) и (1.8) в (1.7), затем (1.4) и (1.7) в (1.6) и получаем первое соотношение леммы. ν_{21} находится из условия $\nu_{21} = -\nu_2'(s)|_{s=0}$ ◐.

Заметим, что во всех леммах и теоремах этой главы ν_{21}, h_{21}, π_{21} и т. д. будут находиться, как обычно, из соответствующих выражений для $\nu_2(s)$, $h_2(s)$ $\pi_{21}(s)$ и т. д. дифференцированием в нуле.

Одна возможная реализация цикла ориентации для схем 1.1—1.4 показана на рис. 1 и иллюстрирует этапы доказательства.

Лемма 1.2. *Для схем 2.1—2.4 функция* $\nu_2(s)$ *равна*

$$\nu_2(s) = \sigma_{12}(s + a_1[1 - c_{21}(s + a_1[1 - \bar{\pi}_1(s)])\bar{\pi}_1(s)]).$$

Если $a_1\beta_{11} < 1$, *то*

$$\nu_{21} = \left[1 + \frac{a_1(c_{211} + \beta_{11})}{1 - a_1\beta_{11}}\right] c_{121}.$$

Доказательство. ◐ Среди a_1-вызовов будем отличать прерывающие вызовы, т. е. такие вызовы, поступление которых в систему находит прибор в процессе ориентации (1→2). Прерывающий вызов назовем П$_1$-хорошим» (П$_1$-плохим»), если за П$_1$-период, связанный с ним, не произойдет (произойдет) «катастрофы». Очевидно, вероятность того, что произвольный прерывающий вызов «П$_1$-хороший» («П$_1$-плохой»), есть $\pi_1(s)$ $(1-\pi_1(s))$. Поток «П$_1$-плохих» прерывающих a_1-вызовов как поток, просеянный из пуассоновского потока с параметром a_1, является также пуассоновским, но с параметром $a_1[1-\pi_1(s)]$ [1, § 7].

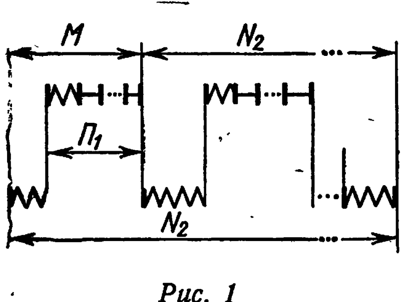


Рис. 1

Справедливо соотношение

$$\nu_2(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{-a_1[1-\pi_1(s)]t} \, dc_{12}(t). \tag{1.9}$$

Действительно, для того чтобы за цикл ориентации не произошло «катастрофы» $<\nu_2(s)>$, необходимо и достаточно, чтобы за длительность ориентации $(1\to)<dC_{12}(t)>$ не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$ и за это время не поступили «Π_1-плохие» прерывающие вызовы $\langle e^{-a_1[1-\pi_1(s)]t}\rangle$. Из (1.9) следует, что $\nu_2(s)=c_{12}(s+a_1[1-\pi_1(s)])$. Используя (1.8), получаем требуемое соотношение. ◐ На рис. 2 приведена одна возможная реализация цикла ориентации для рассматриваемых схем.

Рис. 2.

Лемма 1.3. *Для схем 3.1—3.4*

$$\nu_2(s)=(s+a_1)\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty \frac{e^{-(s+a_1)\tau}\,dC_{12}(\tau)}{s+a_1\{1-c_{21}(s+a_1[1-\pi_1(s)])\,\pi_1(s)\,[1-e^{-(s+a_1)r}]\}}.$$

Если $a_1\beta_{11}<1$, *то*

$$\nu_{21}=\frac{c_{12}(-a_1)-1}{a_1}\left[1+\frac{a_1(c_{211}+\beta_{11})}{1-a_1\beta_{11}}\right].$$

Доказательство. ◐ Воспользуемся определением концевого и неконцевого промежутка ориентации, введенного при доказательстве леммы 1.1. Пусть время τ, необходимое для ориентации $(1\to2)$, известно. Имеют место соотношения, аналогичные (1.4) и (1.5)

$$c_{12}^k(s;\tau)=e^{-(s+a_1)\tau}, \tag{1.10}$$

$$c_{12}^{\text{н}}(s;\tau)=\int\limits_0^\tau e^{-sx}a_1e^{-a_1x}dx=\frac{a_1}{s+a_1}[1-e^{-(s+a_1)\tau}]. \tag{1.11}$$

Повторяя доказательство леммы 1.1, можно убедиться в справедливости выражений

$$\nu_2(s;\tau) = c_{12}^k(s;\tau) + \mu(s;\tau)\,\nu_2(s;\tau), \qquad (1.12)$$

$$\mu(s;\tau) = c_{12}^{\text{н}}(s;\tau)\,\pi_1(s), \qquad (1.13)$$

где

$$\pi_1(s) = c_{21}(s + a_1[1 - \bar{\pi}_1(s)])\,\bar{\pi}_1(s), \qquad (1.14)$$

а $\bar{\pi}_1(s)$ определяется из уравнения (1.1).

Подставив (1.14) и (1.11) в (1.13), затем (1.13) и (1.10) в (1.12) и проинтегрировав по мере $dC_{12}(\tau)$, получаем первое соотношение леммы. ◐

Лемма 1.4. *Для схем 4.1—4.4*

$$\nu_2(s) = c_{12}(s + a_1)\{1 - c_{12}(s + a_1[1 - \bar{\pi}_1(s)]) - - c_{12}(s + a_1)]\,c_{21}(s + a_1[1 - \bar{\pi}_1(s)])\}^{-1}.$$

Если $a_1\beta_{11} < 1$, *то*

$$\nu_{21} = \frac{c_{121} + c_{211}(1 - c_{12}(a_1))}{c_{12}(a_1)(1 - a_1\beta_{11})}.$$

Доказательство. ◐ a_1-вызов назовем «Π_1-хорошим» («Π_1-плохим»), если за Π_1-период, связанный с ним, не произойдет (произойдет) «катастрофы». Вероятность того, что произвольный a_1-вызов «Π_1-хороший» («Π_1-плохой») есть $\bar{\pi}_1(s)$ $(1-\bar{\pi}_1(s))$. Поток «Π_1-плохих» вызовов, как поток, просеянный из пуассоновского потока, является пуассоновским с параметром $a_1[1-\bar{\pi}_1(s)]$. Заменим в определении промежутка M (см. доказательство леммы 1.1) слова «...поступил a_1-вызов» на «...поступил хотя бы один a_1-вызов» и найдем вероятность того, что за этот промежуток не произойдет «катастрофы». С одной стороны, эта вероятность есть $\mu(s)$. С другой стороны, можно убедиться, что

$$\mu(s) = \sum_{n\geq 1} [\bar{\pi}(s)]^n \int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_1t)^n}{n!}e^{-a_1t}\,dC_{12}(t)\times \times c_{21}(s + a_1[1 - \bar{\pi}_1(s)]). \qquad (1.15)$$

Действительно, пусть ориентация $(1 \to 2)$ длилась время t. Под интегралом имеем: за t поступило $n \geqslant 1$ a_1-вызовов $\left\langle \frac{(a_1 t)^n}{n!} e^{-a_1 t} \right\rangle$ и за это время не произошло «катастрофы» $\langle e^{-st} \rangle$. Далее, каждый из n поступивших вызовов — «$\bar{\Pi}_1$-хороший» $\langle [\bar{\pi}_1(s)]^n \rangle$, за ориентацию $(2 \to 1)$ не произошло «катастрофы» и поступили разве лишь «$\bar{\Pi}_1$-хорошие» a_1-вызовы $\langle c_{21}(s+a \times [1-\bar{\pi}_1(s)]^n \rangle$ (ибо слагаемые потоки независимы и каждый является пуассоновским с параметром s и $a_1[1-\bar{\pi}_1(s)]$). Из (1.15) (внеся $[\bar{\pi}_1(s)]^n$ под интеграл, произведя суммирование и интегрирование) имеем

$$\mu(s) = [c_{12}(s + a_1[1 - \bar{\pi}_1(s)]) - c_{12}(s + a_1)] \, c_{21}(s + a_1 \times [1 - \bar{\pi}_1(s)]). \quad (1.15')$$

Справедливость формулы

$$\nu_2(s) = c_{12}(s + a_1) + \mu(s) \cdot \nu_2(s)$$

устанавливается так же, как (1.16) при доказательстве леммы 1.1. Подставляя выражение для $\mu(s)$ в последнюю формулу, получаем требуемое. ◐ Одна реализация цикла ориентации для схем 4.1—4.4 показана на рис. 3.

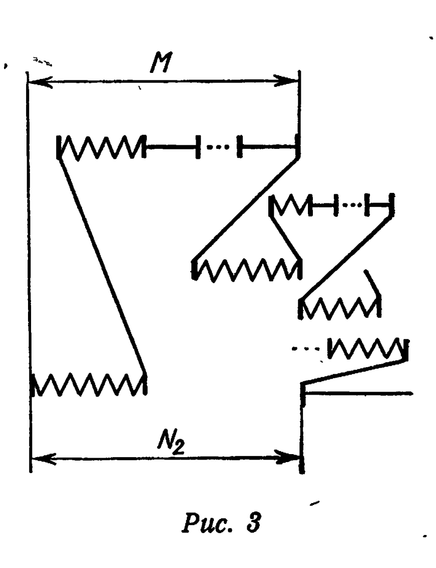


Рис. 3

§ 3

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЦИКЛОВ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Преобразование Л. — С. $h_2(s)$ ф. р. длительностей циклов обслуживания $H_2(x)$ для всех рассматриваемых схем задается следующими леммами.

Лемма 1.5. *Для схем 1.1, 2.1, 3.1, 4.1 функция $h_2(s)$ определяется из соотношения*

$$h_2(s) = \beta_2(s+a_1)\left\{1 - \frac{a_1}{s+a_1}[1-\beta_2(s+a_1)]\times\right.$$

$$\left.\times c_{21}(s+a_1[1-\bar{\pi}_1(s)])\,\bar{\pi}_1(s)\,\nu_2(s)\right\}^{-1},$$

где $\nu_2(s)$ *для каждой из схем выражается соотношениями лемм 1.1—1.4.*

Если $a_1\beta_{11}<1$, *то*

для схем 1.1

$$h_{21} = \frac{1-\beta_2(a_1)}{\beta_2(a_1)\,c_{12}(a_1)}\left[\frac{1}{a_1} + \frac{c_{211}+\beta_{11}}{1-a_1\beta_{11}}\right],$$

для схемы 2.1

$$h_{21} = \frac{[1-\beta_2(a_1)]\,[1-a_1c_{121}]}{a_1\beta_2(a_1)}\left[1 + \frac{a_1(c_{211}+\beta_{11})}{1-a_1\beta_{11}}\right],$$

для схемы 3.1

$$h_{21} = \frac{[1-\beta_2(a_1)]\,c_{12}(-a_1)}{\beta_2(a_1)}\left[\frac{1}{a_1} + \frac{c_{211}+\beta_{11}}{1-a_1\beta_{11}}\right],$$

для схемы 4.1

$$h_{21} = \frac{1-\beta_2(a_1)}{\beta_2(a_1)}\left\{\frac{1}{a_1} + \frac{c_{211}+\beta_{11}}{1-a_1\beta_{11}} + \right.$$

$$\left. + \frac{c_{121}+c_{211}(1-c_{12}(a_1))}{c_{12}(a_1)(1-a_1\beta_{11})}\right\}.$$

Доказательство. ◑ Цикл обслуживания имеет следующую структуру. Либо за длительность обслуживания a_2-вызова не поступает a_1-вызов и цикл обслуживания заканчивается моментом завершения обслуживания этого вызова. Либо за время обслуживания a_2-вызова поступает a_1-вызов, обслуживание прерывается, начинается Π_1-период, после его завершения идет цикл ориентации, после чего a_2-вызов начинает обслуживаться заново, т. е. начинается новый цикл обслуживания. В первом случае будем говорить о концевом промежутке обслуживания. Неконцевой промежуток обслуживания определим как промежуток, начинающийся с момента начала обслуживания a_2-вызова и заканчивающийся моментом первого прерывания. Пусть $B_2^k(x)$ и $B_2^{\text{н}}(x)$ — условные ф. р. кон-

цевого, неконцевого промежутка обслуживания, а $\beta_2^k(s)$ и $\beta_2^н(s)$ — их преобразования Л. — С. Заменим еще в определении промежутка М (см. доказательство леммы 1.1) слова «ориентации (1⟶2)» на «обслуживания a_2-вызова». Как при доказательстве леммы 1.1, устанавливается справедливость следующих соотношений:

$$\beta_2^k(s) = \beta_2(s + a_1), \tag{1.16}$$

$$\beta_2^н(s) = \frac{a_1}{s + a_1}[1 - \beta_2(s + a_1)], \tag{1.17}$$

$$h_2(s) = \beta_2^k(s) + \mu(s)\nu_2(s)h_2(s), \tag{1.18}$$

$$\mu(s) = \beta_2^н(s)\pi_1(s), \tag{1.19}$$

где

$$\pi_1(s) = c_{21}(s + a_1[1 - \bar{\pi}_1(s)])\bar{\pi}_1(s),$$

$$\bar{\pi}_1(s) = \beta_1(s + a_1[1 - \bar{\pi}_1(s)]).$$

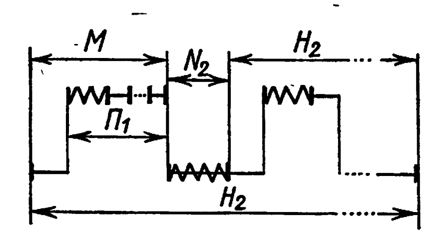


Рис. 4

Из (1.18), с учетом (1.16), (1.17) и (1.19), следует первое соотношение леммы. ◐ На рис. 4 показана одна из реализаций цикла обслуживания.

Лемма 1.6. *Для схем 1.2, 2.2, 3.2, 4.2.*

$$h_2(s) = \beta_2(s + a_1) + \frac{a_1}{s + a_1}[1 - \beta_2(s + a_1)] \times$$
$$\times c_{21}(s + a_1)[1 - \bar{\pi}_1(s)]\bar{\pi}_1(s)\nu_2(s),$$

где $\nu_2(s)$ для каждой из схем выражается соотношениями лемм 1.1—1.4 соответственно.

Если $a_1\beta_{11}<1$, *то*
для схемы 1.2

$$h_{21}=\frac{1-\beta_2(a_1)}{c_{12}(a_1)}\left[\frac{1}{a_1}+\frac{c_{211}+\beta_{11}}{1-a_1\beta_{11}}\right],$$

для схемы 2.2

$$h_{21}=\frac{[1-\beta_2(a_1)](1+a_1c_{121})}{a_1}\left[1+\frac{a_1(c_{211}+\beta_{11}}{1-a_1\beta_{11}}\right],$$

для схемы 3.2

$$h_{21}=\frac{[1-\beta_2(a_1)]\,c_{12}(-a_1)}{a_1}\left[1+\frac{a_1(c_{211}+\beta_{11})}{1-a_1\beta_{11}}\right],$$

для схемы 4.2

$$h_{21}=\frac{1-\beta_2(a_1)}{c_{12}(a_1)}\left\{\frac{1}{a_1}+\frac{c_{211}+\beta_{11}}{1-a_1\beta_{11}}+\right.$$

$$\left.+\frac{c_{121}+c_{211}(1-c_{12}(a_1))}{c_{12}(a_1)(1-a_1\beta_{11})}\right\}.$$

Доказательство. ◑ Ход доказательства такой же, как для леммы 1.5. Соотношения (1.16), (1.17) и (1.19) справедливы и в этом случае. Соотношение (1.18) заменяется на

$$h_2(s)=\beta_2^k(s)+\mu(s)\,\nu_2(s),$$

которое легко доказывается, учитывая строение цикла обслуживания для рассматриваемых схем. ◐ На рис. 5 показана одна возможная реализация цикла обслуживания для этих схем.

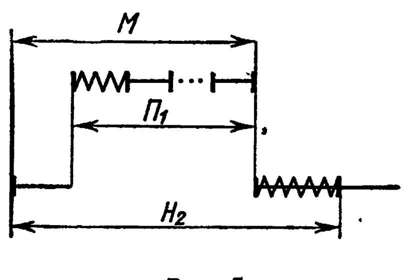


Рис. 5

Лемма 1.7. *Для схем 1.3, 2.3, 3.3, 4.3.*

$$h_2(s)=\beta_2(s+a_1[1-c_{21}(s+a_1\times$$

$$\times[1-\bar{\pi}_1(s)]\,\bar{\pi}_1(s)\,\nu_2(s)]),$$

где $\nu_2(s)$ *для каждой из схем выражается соотношениями лемм 1.1—1.4 соответственно.*

Если $a_1\beta_{11}<1$, *то*
для схемы 1.3

$$h_{21}=\frac{\beta_{21}}{c_{12}(a_1)}\left[1+\frac{a_1(c_{211}+\beta_{11})}{1-a_1\beta_{11}}\right],$$

для схемы 2.3

$$h_{21}=\beta_{21}(1+a_1c_{121})\left[1+\frac{a_1(c_{211}+\beta_{11})}{1-a_1\beta_{11}}\right],$$

для схемы 3.3

$$h_{21}=\beta_{21}c_{12}(-a_1)\left[1+\frac{a_1(c_{211}+\beta_{11})}{1-a_1\beta_{11}}\right],$$

для схемы 4.3

$$h_{21}=\beta_{21}\left\{1+\frac{a_1}{1-a_1\beta_{11}}\left[c_{211}+\beta_{11}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{c_{121}+c_{211}(1-c_{12}(a_1))}{c_{12}(a_1)}\right]\right\}.$$

Доказательство. ◑ Обозначим через D промежуток времени, начинающийся с момента начала ориентации (2⟶1) к обслуживанию вызова, приведшего к прерыванию, и заканчивающийся сразу, как только прибор готов продолжить обслуживание прерванного вызова. Прерывающий (обслуживание) a_1-вызов назовем «$П_1N_2$-хорошим» («$П_1N_2$-плохим»), если за промежуток D не произойдет (произойдет) «катастрофы». Прежде всего, можно понять, что

$$\delta(s)=\pi_1(s)\,\nu_2(s)=c_{21}(s+a_1[1-\bar{\pi}_1(s)])\,\bar{\pi}_1(s)\,\nu_2(s). \tag{1.20}$$

Действительно, это следует из строения промежутка D и предположения того, что за время его осуществления не должно произойти «катастрофы». Таким образом, вероятность того, что прерывающий вызов «$П_1N_2$-хороший» («$П_1N_2$-плохой») есть $\delta(s)(1-\delta(s))$. Далее, поток «$П_1N_2$-плохих» прерывающих вызовов, очевидно, пуассоновский с параметром $a_1[1-\delta(s)]$.

Справедливо соотношение

$$h_2(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{-a_1[1-\delta(s)]t} \, dB_2(t), \qquad (1.21)$$

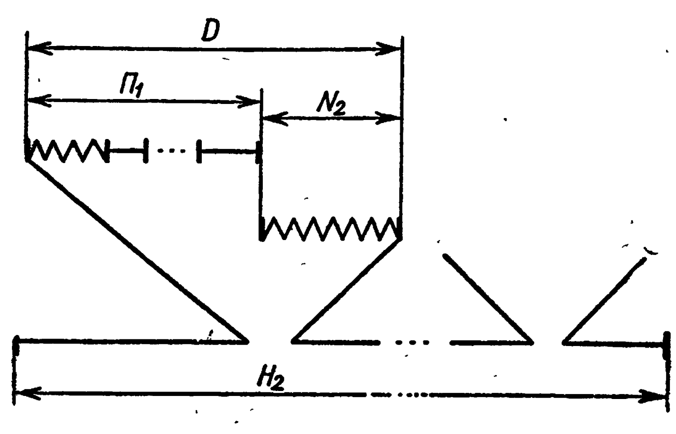


Рис. 6

которое проверяется так же, как и (1.9). Из (1.21) и (1.20) получаем первое соотношение леммы. ◐ Одна реализация цикла обслуживания изображена на рис. 6.

Лемма 1.8. *Для схем 1.4, 2.4, 3.4, 4.4*

$$h_2(s) = (s + a_1) \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{e^{-(s+a_1)u} \, dB_2(u)}{s + a_1\{1 - c_{21}(s + a_1[1 - \bar{\pi}_1(s)])\bar{\pi}_1(s)\nu_2(s)[1 - e^{-(s+a_1)u}]\}},$$

где $\nu_2(s)$ *для каждой из схем выражается соотношениями лемм 1.1—1.4 соответственно.*

Если $a_1\beta_{11} < 1$, *то*

для схемы 1.4

$$h_{21} = \frac{[\beta_2(-a_1) - 1}{c_{12}(a_1)} \left[\frac{1}{a_1} + \frac{c_{211} + \beta_{11}}{1 - a_1\beta_{11}} \right],$$

для схемы 2.4

$$h_{21} = \frac{[\beta_2(-a_1) - 1](1 + a_1 c_{121})}{a_1} \left[1 + \frac{a_1(c_{211} + \beta_{11})}{1 - a_1\beta_{11}} \right],$$

для схемы 3.4

$$h_{21} = \frac{[\beta_2(-a_1) - 1]\, c_{12}(-a_1)}{a_1} \left[1 + \frac{a_1 (c_{211} + \beta_{11})}{1 - a_1 \beta_{11}}\right],$$

для схемы 4.4

$$h_{21} = \frac{\beta_2(-a_1) - 1}{a_1} \left\{1 + \frac{a_1}{1 - a_1\beta_{11}} \left[c_{211} + \beta_{11} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{c_{121} + c_{211}(1 - c_{12}(a_1))}{c_{12}(a_1)}\right]\right\}.$$

Доказательство. ◑ Воспользуемся определением концевого и неконцевого промежутка обслуживания, введенного при доказательстве леммы 1.5. Пусть время u, необходимое для обслуживания a_2-вызова, известно. Имеют место соотношения, аналогичные (1.16)—(1.19)

$$\beta_2^k(s;\, u) = e^{-(s+a_1)u}, \tag{1.22}$$

$$\beta_2^H(s;\, u) = \int_0^u e^{-su} a_1 e^{a_1 u}\, du = \frac{a_1}{s + a_1}\left[1 - e^{-(s+a_1)u}\right], \tag{1.23}$$

$$h_2(s;\, u) = \beta_2^k(s;\, u) + \mu(s;\, u)\, \nu_2(s)\, h_2(s;\, u), \tag{1.24}$$

$$\mu(s;\, u) = \beta_2^H(s;\, u)\, \pi_1(s), \tag{1.25}$$

где

$$\pi_1(s) = c_{21}(s + a_1[1 - \bar{\pi}_1(s)])\, \bar{\pi}_1(s). \tag{1.26}$$

Подставив (1.26) и (1.23) в (1.19), затем (1.25) и (1.22) в (1.24) и проинтегрировав по $dB_2(u)$, получаем требуемое. ◐

§ 4

ПЕРИОД ЗАНЯТОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ С РЕЖИМОМ ОРИЕНТАЦИИ ПРИБОРА «СБРОС В НУЛЬ»

Цель этого параграфа — получить (в терминах преобразования Л.—С.) распределение длины периода занятости системы для схем 1.1—4.4 с режимом ориентации прибора «сброс в нуль». Положим $\sigma = a_1 + a_2$.

Теорема 1.1. *Для схем 1.1—4.4 режима «сброс в нуль»*

а) $$\sigma\pi(s) = a_1\pi_{21}(s) + a_2\pi_{22}(s), \qquad (1.27)$$

$$\pi_{21}(s) = \pi_1(s + a_2) + \{\pi_1(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2(s)]) -$$

$$- \pi_1(s + a_2)\}\,\nu_2(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2(s)]), \qquad (1.28)$$

$$\pi_{22}(s) = \nu_2(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2(s)])\,\bar{\pi}_2(s), \qquad (1.29)$$

$$\pi_1(s) = c_{21}(s + a_1[1 - \bar{\pi}_1(s)])\,\bar{\pi}_1(s), \qquad (1.30)$$

$$\bar{\pi}_2(s) = h_2(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2(s)]), \qquad (1.31)$$

$$\bar{\pi}_1(s) = \beta_1(s + a_1[1 - \bar{\pi}_1(s)]), \qquad (1.32)$$

где $\nu_2(s+a_2[1-\pi_2(s)]$ *и* $h_2(s+a_2[1-\bar{\pi}_2(s)])$ *для каждой из схем определяется из соответствующих выражений для* $\nu_2(s)$ и $h_2(s)$ *лемм 1.1—1.8, в которые нужно подставить* $s=s+a_2-a_2\pi_2(s)$;

б) *При* $a_1\beta_{11}<1$, $a_2h_{21}<1$ *выполнено*

$$\sigma\pi_1 = \left\{a_1\left[\frac{c_{211}+\beta_{11}}{1-a_1\beta_{11}} + (1-\pi_1(a_2))\,\nu_{21}\right] + \right.$$

$$\left. + a_2[\nu_{21} + h_{21}]\right\}\frac{1}{1-a_2h_{21}},$$

$$\pi_{211} = \frac{c_{211}+\beta_{11}}{1-a_1\beta_{11}} + (1-\pi_1(a_2))\,\nu_{21}\Big\}\frac{1}{1-a_2h_{21}},$$

$$\pi_{221} = \frac{\nu_{21}+h_{21}}{1-a_2h_{21}}, \quad \pi_{11} = \frac{c_{211}+\beta_{11}}{1-a_1\beta_{11}},$$

$$\bar{\pi}_{21} = \frac{h_{21}}{1-a_2h_{21}}, \quad \bar{\pi}_{11} = \frac{\beta_{11}}{1-a_1\beta_{11}},$$

где ν_{21} *и* h_{21} *для каждой из схем выражаются соответствующими формулами лемм 1.1—1.8.*

Доказательство. ◑ Соотношение (1.27) подтверждается следующими рассуждениями. Пусть за длительности периода занятости системы не произошло «катастрофы» $<\pi(s)>$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

либо период занятости с вероятностью a_1/σ являлся Π_{21}-периодом и за его длительность не произошло «катастрофы» $<\pi_{21}(s)>$;

либо период занятости с вероятностью a_2/σ являлся Π_{22}-периодом и за время его осуществления не произошло «катастрофы» $<\pi_{22}(s)>$.

Докажем (1.28). С каждым a_2-вызовом будем связывать свой $\bar{\Pi}_2$-период: промежуток времени, начинающийся с момента начала обслуживания данного вызова и заканчивающийся сразу, как система освободится от данного вызова и вызовов, поступивших после него. Призвольный a_2-вызов назовем «$\bar{\Pi}_2$-хорошим» («$\bar{\Pi}_2$-плохим»), если за $\bar{\Pi}_2$-период, связанный с ним, не произойдет (произойдет) «катастрофы». Вероятность того, что вызов «$\bar{\Pi}_2$-хороший» («$\bar{\Pi}_2$-плохой»), очевидно, равна $\bar{\pi}_2(s)$ $(1-\bar{\pi}_2(s))$. Поток «$\bar{\Pi}_2$-плохих» a_2-вызовов — пуассоновский с параметром $a_2[1-\bar{\pi}_2(s)]$.

Покажем, что справедливо соотношение

$$\pi_{21}(s)=\int_0^\infty e^{-(s+a_2)t}\,d\,\Pi_1(t)+$$

$$+\sum_{n\geqslant 1}[\bar{\pi}_2(s)]^n\int_0^\infty e^{-st}\,\frac{(a_2t)^n}{n!}\,e^{-a_2t}\,d\,\Pi_1(t)\times$$

$$\times\,\nu_2(s+a_2[1-\bar{\pi}_2(s)]). \tag{1.33}$$

Действительно, для того чтобы за Π_{21}-период не произошло «катастрофы» $<\pi_{21}(s)>$, необходимо и достаточно, чтобы

либо за длительность Π_1-периода $<d\Pi_1(t)>$ не произошло «катастрофы» и не поступило ни одного a_2-вызова $<e^{-(s+a_2)t}>$;

либо за длительность Π_1-периода $<d\Pi_1(t)>$ не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, поступило $n\geqslant 1$ a_2-вызовов $\left\langle\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\right\rangle$, вызовы являются «$\bar{\Pi}_2$-хорошими» $<[\bar{\pi}_2(s)]^n>$ и за длительность цикла ориентации не произошло «катастрофы» и не поступили «$\bar{\Pi}_2$-плохие» a_2-вызовы $<\nu_2(s+a_2[1-\bar{\pi}_2(s)])>$ (слагаемые потоки независимы и каждый пуассоновский с параметром s и $a_2[1-\bar{\pi}_2(s)]$). Теперь (1.28) следует из (1.33), оста-

лось лишь внести $[\bar{\pi}_2(s)]^n$ под интеграл, просуммировать и проинтегрировать.

Доказательство соотношения (1.29) получается из следующих рассуждений. Для того чтобы за Π_{22}-период не произошло «катастрофы» $<\pi_{22}(s)<$, необходимо и достаточно, чтобы за длительность цикла ориентации не произошло «катастрофы» и не поступило «$\bar{\Pi}_2$-плохих» a_2-вызовов $<\nu_2(s+ +a_2[1-\bar{\pi}_2(s)])>$ и, кроме того, не произошло «катастрофы» за длительность $\bar{\Pi}_2$-периода, связанного с a_2-вызовом, открывшим Π_{22}-период $<\bar{\pi}_2(s)>$.

Соотношение (1.30) уже получено (§ 2, 1.8). Соотношение (1.32) доказано в § 1.

Докажем (1.31). $\bar{\Pi}_2$-период складывается из циклов обслуживания точно так же, как $\bar{\Pi}_1$-период из длительностей обслуживания a_1-вызовов. Проверим справедливость соотношения

$$\bar{\pi}_2(s)=\sum_{n\geqslant 0}[\bar{\pi}_2(s)]^n\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,dH_2(t).$$

Пусть за длительность Π_2-периода не произошло «катастрофы». Для этого необходимо и достаточно, чтобы за длительность цикла обслуживания $<dH_2(t)>$ (которым начался $\bar{\Pi}_2$-период) не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, поступило $n\geqslant 0$ a_2-вызовов $\left\langle\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\right\rangle$ и не произошло «ката-

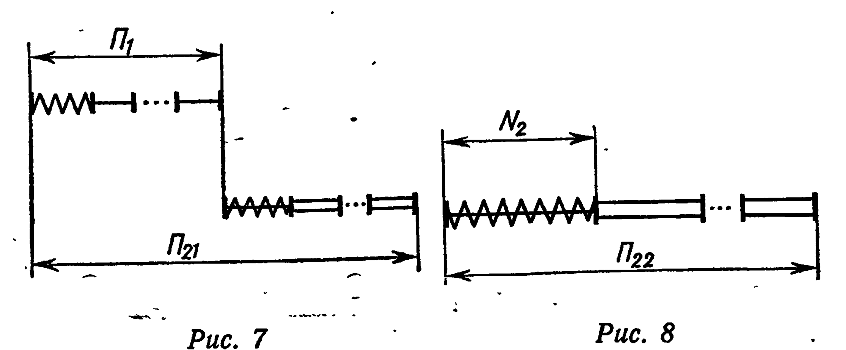


Рис. 7 Рис. 8

строфы» за длительность $\bar{\Pi}_2^{(n)}$-периода $<[\bar{\pi}_2(s)]^n$. Внеся $[\bar{\pi}_2(s)]^n$ под интеграл, произведя суммирование и интегрирование, получаем (1.32).

Формулы п. б) получаются дифференцированием в нуле соотношений (1.27)—(1.32). ◐ На рис. 7 и рис. 8 показано по одной реализации Π_{21}- и Π_{22}-периода.

Замечание. Условия $a_1\beta_{11}<1$, $a_2h_{21}<1$ п. б) могут быть заменены на

$$\rho_2 = a_1 b_1 + a_2 b_2 < 1,$$

где для всех схем

$$b_1 = (\beta_{11} + c_{211})/(1 + a_1 c_{211}),$$

а b_2 для каждой из схем имеет свое выражение. Приведем выражения b_2 для схем с абсолютным приоритетом:

для схем 1.1, 2.1 и 3.1

$$b_2 = \frac{1}{a_1}\left[\frac{1}{\beta_2(a_1)} - 1\right] q,$$

для схем 1.2, 2.2 и 3.2

$$b_2 = \frac{1-\beta_2(a_1)}{a_1} q,$$

для схем 1.3, 2.3 и 3.3

$b_2 = \beta_{21} q$.

Участвующие в выражениях для b_2 q определяются

для схем 1.1—1.3 $q = 1/c_{12}(a_1)$,

для схем 2.1—2.3 $q = 1/c_{12}(a_1)$,

для схем 3.1—3.3 $q = c_{12}(-a_1)$.

При этом $\sigma\pi_1 = (\Phi+\rho_2)/(1-\rho_2)$,

где

$$\Phi = \frac{\sigma - a_1 \pi_1(a_2)}{a_1}(q-1).$$

Доказательство дано в гл. 6 для случая r-приоритетов.

§ 5

ПЕРИОД ЗАНЯТОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ С РЕЖИМОМ ОРИЕНТАЦИИ «СМОТРИ ВПЕРЕД»

Получим сначала вспомогательное соотношение, выражающее преобразование Л.—С. ф. р. длины Φ_1-периода.

Лемма 1.9. *Для схем 1.1—4.4*

а)

$$\psi_1(s) = c_{21}(\xi(s+a_2))\{1-[c_{21}(\xi(\eta(s)))-$$
$$-c_{21}(\xi(s+a_2))]\cdot\nu_2(\eta(s))\}^{-1},$$

где

$$\xi(s) = s + a_1 - a_1\bar{\pi}_1(s),\quad \eta(s) = s + a_2 - a_2\bar{\pi}_2(s), \tag{1.34}$$
$$\bar{\pi}_1(s) = \beta_1(\xi(s)),\quad \bar{\pi}_2(s) = h_2(\eta(s)),$$

а $\nu_2(\eta(s))$, $h_2(\eta(s))$ *для каждой из схем определяются из соответствующих выражений для* $\nu_2(s)$ *и* $h_2(s)$ *лемм 1.1—1.8 при* $s=\eta(s)$;

б) Если $a_1\beta_{11}<1$, $a_2h_2<1$, *то*

$$\varphi_{11} = \frac{c_{211}}{\gamma(1-a_2h_{21})(1-a_1\beta_{11})} + \nu_{21},$$

где $\gamma=c_{21}(\xi(a_2))$, a_{21} *и* h_{21} *для каждой из схем выражаются соответствующими формулами лемм 1.1—1.8.*

Доказательство. ◑ Назовем этапом промежуток времени, начинающийся с момента начала ориентации $(2\longrightarrow1)°$ и заканчивающийся сразу, как только система стала свободной. Ясно, что по окончании этапа прибор останется либо с ориентацией $(2\longrightarrow1)$, либо с ориентацией $(1\longrightarrow2)$. Этап, по окончании которого прибор имеет ориентацию $(2\longrightarrow1)$ $(1\longrightarrow2)$, назовем концевым (неконцевым) этапом. Обозначим через $G_1(t)$ и $G_2(t)$ ф. р. длительности концевого и неконцевого этапов. Справедливо соотношение

$$\varphi_1(s) = g_1(s) + g_2(s)\varphi_1(s). \tag{1.35}$$

Действительно, для того чтобы за Φ_1-период не произошло «катастрофы» $<\varphi(s)>$, необходимо и достаточно, чтобы

либо Φ_1-период был концевым этапом и за время его осуществления не произошло «катастрофы» $<g_1(s)>$;

либо Φ_1-период был неконцевым, за время его осуществления не произошло «катастрофы» $<g_2(s)>$ и не произошло «катастрофы» за проме-

жуток времени, начинающийся с момента начала ориентации $(2\to 1)^\circ$ и заканчивающийся, когда ориентация $(2\to 1)$ закончена и система свободна от вызовов $<\varphi_1(s)>$.

Найдем вероятности $g_1(s)$ и $g_2(s)$. Обозначим через E_1 (E_2) событие, заключающееся в осуществлении без «катастроф» концевого (неконцевого) этапа. Предположим, что совершилось событие E_1. Тогда совершилось одно из следующих событий: E_{11} — за время ориентации $(2\to 1)^\circ$ не произошло «катастрофы» и не поступило ни одного a_1-вызова и ни одного a_2-вызова;

E_{12} — за время ориентации $(2\to 1)^\circ$ не произошло «катастрофы», поступило $n\geqslant 1$ a_1-вызовов, не поступило a_2-вызовов, за $\overline{\Pi}_1^{(n)}$-период не произошло «катастрофы» и не поступило a_2-вызовов.

Вероятности перечисленных событий (обозначим их через $\alpha(s)$ и $\alpha_2(s)$) равны.

$$\alpha_1(s) = \int_0^\infty e^{-a_1t}e^{-a_2t}e^{-st}\,dc_{21}(t) = c_{21}(s+\sigma),$$

$$\alpha_2(s) = \sum_{n\geqslant 1}[\bar{\pi}_1(s+a_2)]^n\int_0^\infty e^{-a_2t}e^{-st}\frac{(a_1t)^n}{n!}e^{-a_1t}dC_{21}(t) =$$

$$= c_{21}(s+a_1[1-\bar{\pi}_1(s+a_2)]+a_2) - c_{21}(s+\sigma).$$

Так как вероятность события E_1 равна сумме вероятностей событий E_{11} и E_{12}, то

$$g_1(s) = \alpha_1(s)+\alpha_2(s) =$$

$$= c_{21}(s+a_1[1-\bar{\pi}_1(s+a_2)]+a_2).$$

Предположим, что произошло событие E_2. Тогда произошло одно из следующих событий:

E_{21} — за время ориентации $(2\to 1)^\circ$ не произошло «катастрофы», не поступило ни одного a_1-вызова, поступили $m\geqslant 1$ «$\overline{\Pi}_2$-хороших» (определение «$\overline{\Pi}_2$-хорошего» вызова см. в § 4) a_2-вызовов, за цикл ориентации не произошло «катастрофы» и поступили разве лишь «$\overline{\Pi}_2$-хорошие» a_2-вызовы;

E_{22} — за время ориентации $(2\to 1)^\circ$ не произошло «катастрофы», поступило $n\geqslant 1$ a_1-вызовов, не

было a_2-вызовов, за $\overline{\Pi}_1^{(n)}$ -период поступило $m \geqslant 1$ a_2-вызовов и за это время не произошло «катастрофы», за цикл ориентации не произошло «катастрофы»» и поступили разве лишь «Π_2-хорошие» a_2-вызовы;

E_{23} — за время ориентации $(2 \to 1)°$ не произошло «катастрофы», поступило $n \geqslant 1$ a_1-вызовов, $m \geqslant 1$ «$\overline{\Pi}_2$-хороших» a_2-вызовов, за $\overline{\Pi}_1^{(n)}$ -период не поступило ни одного a_2-вызова и не произошло «катастрофы», за цикл ориентации не произошло «катастрофы» и поступили разве лишь «Π_2-хорошие» a_2-вызовы;

E_{24} — за время ориентации $(2 \to 1)°$ не произошло «катастрофы», поступили $n \geqslant 1$ a_1-вызовов, $m_1 \geqslant 1$ «$\overline{\Pi}_2$-хороших» a_2-вызовов, за $\overline{\Pi}_1^{(n)}$ -период поступило $m_2 \geqslant 1$ a_2-вызовов и не произошло «катастрофы», за цикл ориентации не произошло «катастрофы» и поступили разве лишь «$\overline{\Pi}_2$-хорошие» a_2-вызовы.

Обозначим через $\gamma_i(s)$ $(i=\overline{1,4})$ вероятности указанных событий. Ясно, что

$$g_2(s) = \sum_{i=1}^{4} \gamma_i(s). \tag{1.36}$$

Для нахождения вероятностей $\gamma_i(s)$ поступим следующим образом. Обозначим через $\widehat{\Pi}(t)$ ф. р. длины промежутка времени, начинающегося с момента начала ориентации $(2 \to 1)°$ и заканчивающегося сразу, как только система освободится от a_1-вызовов, в предположении, что за время ориентации $(2 \to 1)°$ поступило $k \geqslant 1$ a_1-вызовов. Пусть совершилось событие, состоящее в том, что $\widehat{\Pi}$-период осуществился без «катастрофы». Тогда, с одной стороны, вероятность этого события равна $\widehat{\pi}(s)$, с другой стороны, она равна

$$\sum_{k \geqslant 1} [\bar{\pi}_1(s)]^k \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_1 t)^k}{k!} e^{-a_1 t} dC_{21}(t) =$$
$$= c_{21}(s + a_1[1 - \bar{\pi}_1(s)]) - c_{21}(s + a),$$

так что

$$\widehat{\pi}(s) = c_{21}(s + a_1[1 - \bar{\pi}_1(s)]) - c_{21}(s + a_1). \tag{1.37}$$

Предположим, что за $\widehat{\Pi}$-период поступило $l \geqslant 1$ a_2-вызовов. Обозначим через F событие, заключающееся в функционировании системы без «катастрофы», начиная с момента начала ориентации $(2 \to 1)^\circ$ при условии, что за $\widehat{\Pi}$-период поступило $l \geqslant 1$ a_2-вызовов, и заканчивая непосредственно моментом, когда система стала свободной от вызовов. Событие F можно рассматривать как сумму следующих несовместимых событий:

F_1 — за время ориентации $(2 \to 1)^\circ$ не произошло «катастрофы», поступило k a_1-вызовов, 0 a_2-вызовов, за $\overline{\Pi}_1^{(k)}$-период поступило l «$\overline{\Pi}_2$-хороших» a_2-вызовов и за это время не произошло «катастрофы», за цикл ориентации не произошло «катастрофы» и поступили разве лишь «$\overline{\Pi}_2$-хорошие» a_2-вызовы;

F_2 — за время ориентации $(2 \to 1)^\circ$ не произошло «катастрофы», поступило k a_1-вызовов, l «Π_2-хороших» a_2-вызовов, за $\overline{\Pi}_1^{(k)}$ -период поступило 0 a_2-вызовов и не произошло «катастрофы», за цикл ориентации не произошло «катастрофы» и поступили разве лишь «$\overline{\Pi}_2$-хорошие» a_2-вызовы;

F_3 — за время ориентации $(2 \to 1)^\circ$ не произошло «катастрофы», поступило k a_1-вызовов, $l_1 (0 < l_1 < l)$ «Π_2-хороших» a_2-вызовов, за $\overline{\Pi}_1^{(k)}$ -период поступило $l_2 = l - l_1$ «$\overline{\Pi}_2$-хороших» a_2-вызовов и за это время не произошло «катастрофы», за цикл ориентации не произошло «катастрофы» и поступили разве лишь «$\overline{\Pi}_2$-хорошие» a_2-вызовы.

Событие F_j отличается от $F_{2,j+1}$, $j = 1, 2, 3$ разве лишь числом вызовов, что не играет роли при определении вероятностей данных событий. Следовательно,

$$f_s(s) = \gamma_{j+1}(s), \tag{1.38}$$

где $f_j(s)$ — вероятность события F_j, $j = 1, 2, 3$. А так как вероятность события F (обозначим ее через $f(s)$) равна сумме вероятностей событий F_j, то с учетом (1.38) имеем $f(s) = \gamma_2(s) + \gamma_3(s) + \gamma_4(s)$. С другой стороны, нетрудно доказать, что

$$f(s) = \sum_{l \geqslant 1} [\bar{\pi}_2(s)]^l \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^l}{l!} e^{-a_2 t} d\widehat{\Pi}(t) \nu_2 \times$$

$$\times \nu_2 (s + a_2 [1 - \bar{\pi}_2 (s)]) = [\hat{\pi} (s + a_2 [1 - \bar{\pi}_2 (s)]) - $$
$$- \hat{\pi} (s + a_2)] \nu_2 (s + a_2 [1 - \bar{\pi}_2 (s)]).$$

Или, подставляя вместо $\hat{\pi}(s)$ его выражение, заданное равенством (1.37), получим

$$f(s) = [c_{21} (s + a_2 [1 - \bar{\pi}_2 (s)] +$$
$$+ a_1 [1 - \bar{\pi}_1 (s + a_2 [1 - \bar{\pi}_2 (s)])] -$$
$$- c_{21} (s + a_2 [1 - \bar{\pi} (s)] + a_1) -$$
$$- c_{21} (s + a_2 + a_1 [1 - \bar{\pi}_1 (s + a_2)]) +$$
$$+ c_{21} (s + \sigma)] \nu_2 (s + a_2 [1 - \bar{\pi}_2 (s)]).$$

Осталось получить вероятность события E_{21}

$$\gamma_1 (s) = \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^m}{m!} e^{-a_2 t} dC_{21} (t) \times$$
$$\times [\bar{\pi}_2 (s)]^m \nu_2 (s + a_2 [1 - \bar{\pi}_2 (s)]) =$$
$$= [c_{21} (s + a_1 + a_2 [1 - \bar{\pi}_2 (s)]) -$$
$$- c_{21} (s + \sigma)] \nu_2 (s + a_2 [1 - \bar{\pi}_2 (s)]).$$

Подставляя полученные выражения для $\gamma_1(s)$ и $\gamma_2(s) + \gamma_3(s) + \gamma_4(s) = f(s)$ в (1.36), находим

$$g_2 (s) = \{c_{21} (s + a_2 [1 - \bar{\pi}_2 (s)] +$$
$$+ a_1 [1 - \bar{\pi}_1 (s + a_2 [1 - \bar{\pi}_2 (s)])]) -$$
$$- c_{21} (s + a_2 + a_1 [1 - \bar{\pi}_1 (s + a_2)])\} \times$$
$$\times \nu_2 (s + a_2 [1 - \bar{\pi}_2 (s)]). \qquad (1.39)$$

Тем самым соотношение п. а) леммы доказано, нужно лишь подставить выражение для $g_1(s)$ и $g_2(s)$ в (1.35) и переходить к обозначениям (1.34). ◐

Теорема 1.2. *Для схем 1.1—4.4 режима «смотри вперед»*

а)

$$\sigma\pi (s) = a_1 \pi_{21} (s) + a_2 \pi_{22} (s),$$

$$\pi_{21}(s)=\bar{\pi}_1(s+a_2)+\{\bar{\pi}_1(s+a_2)[1-\bar{\pi}_2(s)])-$$
$$-\bar{\pi}_1(s+a_2)\}\nu_2(s+a_2[1-\bar{\pi}_2(s)])\varphi_1(s), \qquad (1.40)$$

$$\pi_{22}(s)=\nu_2(s+a_2[1-\bar{\pi}_2(s)])\bar{\pi}_2(s)\varphi_1(s), \qquad (1.41)$$
$$\bar{\pi}_2(s)=h_2(s+a_2[1-\bar{\pi}_2(s)]),$$
$$\bar{\pi}_1(s)=\beta_1(s+a_1[1-\bar{\pi}_1(s)]),$$

где для каждой из схем $\nu_2(s+a_2-a_2\bar{\pi}_2(s))$, $h_2(s+$ $+a_2-a_2\bar{\pi}_2(s))$ *определяются из соответствующих выражений для* $\nu_2(s)$ *и* $h_2(s)$ *лемм 1.1—1.8, при* $s=s+a_2-a_2\bar{\pi}_2(s)$; $\varphi_1(s)$ *из леммы 1.9;*

б) *При* $a_1\beta_{11}<1$, $a_2h_{21}<1$ *выполнено*

$$\sigma\pi_1=a_1\left\{\frac{\beta_{11}}{(1-a_1\beta_{11}(1-a_2h_{21})}+(\nu_{21}+\varphi_{11})\times\right.$$
$$\left.\times(1-\pi_1(a_2))\right\}+a_2\left\{\frac{\nu_{21}+h_{21}}{1-a_2h_{21}}+\varphi_{11}\right\},$$

$$\pi_{211}=\frac{\beta_{11}}{(1-a_1\beta_{11})(1-a_2h_{21})}+(\nu_{21}+\varphi_{11})(1-\bar{\pi}_1(a_2)),$$
$$\pi_{221}=\frac{\nu_{21}+h_{21}}{1-a_2h_{21}}+\varphi_{11},$$

$$\pi_{221}=\frac{\nu_{21}+h_{21}}{1-a_2h_{21}}+\varphi_{11},\ \bar{\pi}_{21}=\frac{h_{21}}{1-a_2h_{21}},\ \bar{\pi}_{11}=\frac{\beta_{11}}{1-a_1\beta_{11}},$$

где ν_{21}, h_{21} *и* φ_{11} *для каждой из схем выражаются формулами лемм 1.1—1.9.*

Доказательство. ◑ Первое и два последних соотношения п. а) ничем не отличаются от соотношений (1.27), (1.31) и (1.32) теоремы 1.1. Докажем (1.40). Напомним, что согласно режиму ориентации «смотри вперед» в момент наступления вызова в свободную систему прибор имеет ориентацию (2→1). Следовательно, если поступивший вызов в свободную систему является a_1-вызовом, то он немедленно принимается на обслуживание. Учитывая это и воспользовавшись определением «$\bar{\Pi}_2$-хорошего» a_2-вызова, введенного при доказательстве теоремы 1.1, можем написать соотношение, аналогичное (1.33):

$$\pi_{21}(s)=\int_0^\infty e^{-(s+a_1)t}\,d\overline{\Pi}_1(t)+\sum_{n\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}d\overline{\Pi}_1(t)\times$$

$$\times[\overline{\pi}_2(s)]^n\,\nu_2(s+a_2[1-\overline{\pi}_2(s)]\,\varphi_1(s).$$

Действительно, пусть за Π_{21}-период не произошло «катастрофы» $<\pi_{21}(s)>$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

либо за длительность $\overline{\Pi}_1$-периода $<d\overline{\Pi}_1(t)>$ не произошло «катастрофы» и не поступило a_2-вызовов $<e^{-(s+a_2)t}>$;

либо за длительность $\overline{\Pi}_1$-периода $<d\overline{\Pi}_1(t)>$ не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, за это время поступило $n\geqslant 1$ a_2-вызовов $\left\langle\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\right\rangle$, вызовы являются «$\Pi_2$-хорошими» $<[\overline{\pi}_2(s)]^n>$, за длительность цикла ориентации не произошло «катастрофы» и не поступило «$\overline{\Pi}_2$-плохих» a_2-вызовов $<\nu_2(s+a_2[1-\overline{\pi}_2(s)])>$ и не произошло «катастрофы» за длительность начавшегося затем Φ_1-периода $<\varphi_1(s)>$.

Внеся, как обычно, $[\overline{\pi}_2(s)]^n$ по интеграл, просуммировав и проинтегрировав, получаем (1.40).

Докажем (1.41). Пусть за Π_{22}-период не произошло «катастрофы» $<\pi_{22}(s)>$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы за цикл ориентации не произошло «катастрофы» и не поступило «$\overline{\Pi}_2$-плохих» a_2-вызовов $<\nu_2(s+a_2[1-\overline{\pi}_2(s)])>$, не произошло «катастрофы» за длительность $\overline{\Pi}_2$-периода, связанного с a_2-вызовом, открывшим Π_{22}-период $<\overline{\pi}_2(s)>$ и, кроме того, не произошло «катастрофы» за последовавший затем Φ_1-период $<\varphi_1(s)>$. ◐

§ 6
ПЕРИОД ЗАНЯТОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ С РЕЖИМОМ ОРИЕНТАЦИИ «ЖДИ НАИВЕРОЯТНОГО»

Кроме $\varphi_1(s)$ (лемма 1.9) потребуется еще и $\varphi_2(s)$ — преобразование Л. — С. ф. р. Φ_2-периода.

Лемма 1.10. *Для схем 1.1—4.4*

а)

$$\varphi_2(s) = \nu_2(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2(s)]),$$

где $$\bar{\pi}_2(s) = h_2(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2(s)]),$$

$\nu_2(s+a_2[1-\bar{\pi}_2(s)])$, $h_2(s+a_2[1-\bar{\pi}_2(s)])$ *для каждой из схем определяются из соответствующих выражений для* $\nu_2(s)$ *и* $h_2(s)$ *лемм 1.1—1.8 при* $s=s+a_2-a_2\bar{\pi}_2(s)$;

б) *Если* $a_2h_{21}<1$, *то*

$$\varphi_{21} = \frac{\nu_{21}}{(1 - a_2 h_{21})},$$

где ν_{21} *и* h_{21} *для каждой из схем выражаются соответствующими формулами лемм 1.1—1.8.*

Доказательство ◑ следует из выражения

$$\varphi_2(s) = \int_0^\infty e^{-(s+a_2)t}\, dN_2(t) +$$

$$+ \sum_{n\geq 1} [\bar{\pi}_2(s)]^n \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2t)^n}{n!} e^{-a_2t}\, dN_2.$$

Пусть за Φ_2-период не произошло «катастрофы» $<\varphi_2(s)>$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

либо за длительность цикла ориентации $<dN_2(t)>$ не произошло «катастрофы» и не поступило a_2-вызовов $\langle e^{-(s+a_2)t}\rangle$;

либо за длительность цикла ориентации $<dN_2(t)>$ не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, поступило $n\geq 1$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2t)^n}{n!} e^{-a_2t} \right\rangle$, а также не произошло «катастрофы» за $\bar{\Pi}_2^{(n)}$ -период $<[\bar{\pi}_2(s)]^n>$. Внеся $[\bar{\pi}_2(s)]^n$ под интеграл, просуммировав и проинтегрировав, получаем

$$\varphi_2(s) = \nu_2(s + a_2) + \nu_2(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2(s)]) -$$

$$- \nu_2(s + a_2) = \nu_2(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2(s)]). \quad ◐$$

Теорема 1.3. *Для схем 1.1—4.4 режима «жди наивероятного»*

а)

$$\sigma\pi(s) = \begin{cases} a_1\pi_{21}^{[1]}(s) + a_2\pi_{22}^{[1]}(s), & \textit{если } a_1 \geqslant a_2, \\ a_1\pi_{21}^{[2]}(s) + a_2\pi_{22}^{[2]}(s), & \textit{если } a_1 < a_2, \end{cases}$$

$$\pi_{21}^{[1]}(s) = \bar{\pi}_1(s + a_2) + \{\bar{\pi}_1(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2(s)]) -$$

$$- \bar{\pi}_1(s + a_2)\}\, \nu_2(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2(s)])\, \varphi_1(s),$$

$$\pi_{22}^{[1]}(s) = \nu_2(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2(s)])\, \bar{\pi}_2(s)\, \varphi_1(s), \tag{1.42}$$

$$\pi_{21}^{[2]}(s) = \pi_1(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2(s)])\, \nu_2(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2(s)]),$$

$$\pi_{22}^{[2]}(s) = \bar{\pi}_2(s), \quad \pi_1(s) = c_{21}(s + a_1[1 - \bar{\pi}_1(s)])\, \bar{\pi}_1(s),$$

$$\bar{\pi}_2(s) = h_2(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2(s)]),$$

$$\bar{\pi}_1(s) = \beta_1(s + a_1[1 - \bar{\pi}_1(s)]),$$

где для каждой из схем $\nu_2(s + a_2 - a_2\bar{\pi}_2(s))$, $h_2(s + a_2 - a_2\bar{\pi}_2(s))$ *определяются из соответствующих выражений для* $\nu_2(s)$ *и* $h_2(s)$ *лемм 1.1—1.8 при* $s = s + a_2 - a_2\bar{\pi}_2(s)$; $\varphi_1(s)$ *выражается соответствующей формулой леммы 1.9;*

б) *При* $a_1\beta_{11} < 1$, $a_2h_{21} < 1$ *выполнено*

$$\sigma\pi_1 = \begin{cases} a_1\pi_{211}^{[1]} + a_2\pi_{22}^{[1]}, & \textit{если } a_1 \geqslant a_2, \\ a_1\pi_{211}^{[2]} + a_2\pi_{22}^{[2]}, & \textit{если } a_1 < a_2, \end{cases}$$

$$\pi_{211}^{[1]} = \frac{\beta_{11}}{(1 - a_1\beta_{11})(1 - a_2h_{21})} + (\nu_{21} + \varphi_{11})(1 - \bar{\pi}_1(a_2)),$$

$$\pi_{221}^{[1]} = \frac{\nu_{21} + h_{21}}{1 - a_2h_{21}} + \varphi_{11}, \quad \pi_{211}^{[2]} = \frac{\pi_{11} + \nu_{21}}{1 - a_2h_{21}},$$

$$\pi_{221}^{[2]} = \bar{\pi}_{21} = \frac{h_{21}}{1 - a_2h_{21}}, \quad \pi_{11} = \frac{c_{211} + \beta_{11}}{1 - a_1\beta_{11}}, \quad \bar{\pi}_{11} = \frac{\beta_{11}}{1 - a_1\beta_{11}}.$$

Доказательство. ◑ При $a_1/\sigma \geqslant a_2/\sigma$ по определению режим «жди наивероятного» не что иное, как режим «смотри вперед». Таким образом, все соотношения с индексом «[1]» доказаны в теореме 1.2. Докажем соотношение (1.42). Напомним, что $\Pi_{21}^{[2]}$-период начинается с момента поступления a_1-вызова в свободную от вызовов систему с ориентацией прибора в свободном состоянии

(1⟶2) и заканчивается как только система освободится от вызовов и прибор завершает ориентацию (1⟶2).

Убедимся теперь, что выполняется равенство

$$\pi_{21}^{[2]}(s) = \pi_1(s + a_2)\varphi_2(s) + \\ + \sum_{n\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}d\Pi_1(t)[\bar{\pi}_2(s)]^n\nu_2(s + \\ + a_2[1 - \bar{\pi}_2(s)]). \quad (1.43)$$

Пусть за $\Pi_{21}^{[2]}$ -период не произошло «катастрофы» $\langle\pi_{21}^{[2]}(s)\rangle$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

либо за Π_1-период не произошло «катастрофы» и не поступили a_2-вызовы $<\pi_1(s+a_2)>$, а также за Φ_2-период не произошло «катастрофы» $<\varphi_2(s)>$;

либо за длительность Π_1-периода $<d\Pi_1(t)>$ не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, поступило $n\geqslant 1$ a_2-вызовов $\left\langle\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\right\rangle$ за цикл ориентации не произошло «катастрофы» и поступили разве лишь «$\bar{\Pi}_2$-хорошие» a_2-вызовы $<\nu_2(s+a_2[1-\bar{\pi}_2(s)])>$, поступившие за длительность Π_1-периода $n\geqslant 1$ a_2-вызовов — «$\bar{\Pi}_2$-хорошие» $<[\bar{\pi}_2(s)]^n>$.

Из (1.43) находим

$$\pi_{21}^{[2]}(s) = \pi_1(s + a_2)\varphi_2(s) + \{\pi_1(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2(s)]) - \\ - \pi_1(s + a_2)\}\nu_2(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2(s)]\},$$

откуда, воспользовавшись выражением для $\varphi_2(s)$, заданным леммой 1.10, получаем (1.42). Остальные соотношения либо очевидны, либо доказаны в предыдущих теоремах. ◐

Замечание. Функции $\bar{\pi}_1(s)$, $\pi_1(s)$, $\nu_2(s)$, $h_2(s)$, $\bar{\pi}_2(s)$, $\pi(s)$ — аналитические в полуплоскости Re $s>0$, где их абсолютные величины не превосходят единицы, определяются из соответствующих соотношений однозначно, причем $\bar{\pi}_1(0) = \pi_1(0) = \ldots = \pi(0) = 1$, если $a_1\beta_{11}<1$ и $a_2h_{21}<1$. Доказательство проводится так же, как в [2], гл. 3, §3 и 4.

Глава 2

ПЕРИОДЫ ЗАНЯТОСТИ. ПОЛУОТНОСИТЕЛЬНЫЙ И ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ ПРИОРИТЕТ

§ 1
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ

Определения основных типов промежутков, приведенные в § 5 гл. 0, распространяются, конечно, и на схемы с полуотносительным (схемы 1.5, 2.5 и 3.5) и относительным (схема 4.5) приоритетом. Сохраняются также принятые в § 5 гл. 0 обозначения. Для указанных схем периоды занятости, так же как и в гл. 1, выразятся (посредством вспомогательных промежутков) через циклы ориентации и циклы обслуживания. Легко видеть, что полученные в гл. 1 выражения для $\nu_2(s)$ (циклов ориентации) справедливы и для схем с полуотносительным и относительным приоритетом. А именно, $\nu_2(s)$, а также и ν_{21} для каждой из схем 1.5, 2.5, 3.5 и 4.5 определяются из соотношений лемм 1.1—1.4:

Для схемы 1.5

$$\nu_2(s) = c_{12}(s + a_1)\left\{1 - \frac{a_1}{s + a_1}[1 - c_{12}(s + a_1)] \times \right.$$

$$\left. \times\, c_{21}(s + a_1[1 - \bar{\pi}_1(s)])\,\bar{\pi}_1(s)\right\}^{-1}, \tag{2.1}$$

$$\nu_{21} = \left\{\frac{1}{a_1} + \frac{c_{211} + \beta_{11}}{1 - a_1\beta_{11}}\right\}\left[\frac{1}{c_{12}(a_1)} - 1\right], \tag{2.1'}$$

для схемы 2.5

$$\nu_2(s) = c_{12}(s + a_1[1 - c_{21}(s + a_1[1 - \bar{\pi}_1(s)])\,\bar{\pi}_1(s)]), \tag{2.2}$$

$$\nu_{21} = \left[1 + \frac{a_1(c_{211} + \beta_{11})}{1 - a_1\beta_{11}}\right]c_{121}, \tag{2.2'}$$

для схемы 3.5

$$\nu_2(s) = (s + a_1) \int_0^\infty \frac{e^{-(s+a_1)\tau}\, dC_{12}(\tau)}{s + a_1\{1 - c_{21}(s + a_1[1 - \bar{\pi}_1(s)])\, \bar{\pi}_1(s) \times} \frac{e^{-(s+a_1)\tau}\, dC_{12}(\tau)}{\times [1 - e^{-(s+a_1)\tau}]\}}, \qquad (2.3)$$

$$\nu_{21} = \frac{c_{12}(-a_1) - 1}{a_1} \left[1 + \frac{a_1(c_{211} + \beta_{11})}{1 - a_1\beta_{11}} \right], \qquad (2.3')$$

для схемы 4.5

$$\nu_2(s) = c_{12}(s + a_1)\{1 - [c_{12}(s + a_1[1 - \bar{\pi}_1(s)]) -$$
$$- c_{12}(s + a_1)]\, c_{21}(s + a_1[1 - \bar{\pi}_1(s)])\}^{-1}, \qquad (2.4)$$

$$\nu_{21} = \frac{c_{121} + c_{211}(1 - c_{12}(a_1))}{c_{12}(a_1)(1 - a_1\beta_{11})}. \qquad (2.4')$$

Выражения для циклов обслуживания (очевидно для всех указанных схем $h_2(s)$ будет иметь один и тот же вид) будут получены ниже.

Введем некоторые дополнительные определения и обозначения.

Назовем неполным циклом обслуживания промежуток времени, начинающийся с момента начала обслуживания a_2-вызова и заканчивающийся как только система освободится от данного вызова и a_1-вызовов;

$\overline{\Pi}_2^0$ -периодом, промежуток времени, начинающийся с момента поступления в свободную и ориентированную $(1 \to 2)$ систему a_2-вызова и заканчивающийся как только система освобождается от a_1 и a_2-вызовов;

$\overline{\Pi}_2^1$ -периодом, то же, что и $\overline{\Pi}_2^0$ -периодом, только, если последний обслуженный вызов ($\overline{\Pi}_2^0$ -периода) является a_1-вызовом, то сразу же осуществляется ориентация $(1 \to 2)$.

Обозначим через $H_2^0(x)$, $\overline{\Pi}_2^0(x)$ и $\overline{\Pi}_2^1(x)$ ф. р. названных выше соответственно промежутков, а через $h_2^0(s)$, $\bar{\pi}_2^0(s)$ и $\bar{\pi}^1(s)$ преобразования Л.—С. этих ф. р.

§ 2
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЦИКЛОВ ОБСЛУЖИВАНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ПРОМЕЖУТКОВ

Получим несколько вспомогательных соотношений, а именно преобразование Л.—С. ф. р. цикла обслуживания ($h_2(s)$) неполного цикла обслуживания ($h_2^0(s)$), $\overline{\Pi}_2^0$-периода ($\overline{\pi}_2^0(s)$) и $\overline{\Pi}_2^1$-периода ($\overline{\pi}_2^1(s)$).

Лемма 2.1. *Для схем полуотносительного (схемы 1.5, 2.5, 3.5) и относительного (схема 4.5) приоритета*

$$h_2(s) = \beta_2(s + a_1) + c_{21}(s + a_1[1 - \overline{\pi}_1(s)]) \times \times [\beta_2(s + a_1[1 - \overline{\pi}_1(s)]) - \beta_2(s + a_1)]\, \nu_2(s), \quad (2.5)$$

$$h_2^0(s) = \beta_2(s + a_1) + c_{21}(s + a_1[1 - \overline{\pi}_1(s)]) \times \times [\beta_2(s + a_1[1 - \overline{\pi}_1(s)]) - \beta_2(s + a_1)]. \quad (2.6)$$

Если $a_1\beta_{11} < 1$, *то*

$$h_{21} = \frac{(c_{211}[1 - \beta_2(a_1)] + \beta_{21})}{(1 - a_1\beta_{11})} + \nu_{21}[1 - \beta_2(a_1)], \quad (2.7)$$

$$h_{21}^0 = \frac{(c_{211}[1 - \beta_2(a_1)] + \beta_{21})}{(1 - a_1\beta_{11})}, \quad (2.8)$$

где $\nu_2(s)$ *и* ν_{21} *для каждой из схем 1.5, 2.5, 3.5 и 4.5 определяются из соотношений (2.1)—(2.4) и (2.1′)—(2.4′).*

Доказательство. ◑ Получим (2.5). Покажем, что

$$h_2(s) = \beta_2(s + a_2) + \sum_{n\geq 1} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_1t)^n}{n!} e^{-a_1t}\, dB_2(t) \times \times \sum_{m\geq 0} \overline{\pi}_1^{(n+m)}(s) \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_1t)^m}{m!} e^{-a_1t}\, dC_{21}(t)\, \nu_2(s). \quad (2.9)$$

Действительно, пусть за цикл обслуживания не произошло «катастрофы» $<h_2(s)>$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

либо за длительности обслуживания a_2-вызова

не произошло «катастрофы» и не поступили a_1-вызовы $<\beta_2(s+a_1)>$;

либо за длительности обслуживания a_2-вызова $<dB_2(t)>$ не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, поступило $n\geqslant 1$ a_1-вызовов $\left(\frac{(a_1t)^n}{n!}e^{-a_1t}\right)$, после чего началась ориентация $(2\to 1)$, за время ее осуществления $<dC_{21}(t)>$ не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, поступило $m\geqslant 0$ a_1-вызовов $\left(\frac{(a_1t)^m}{m!}e^{-a_1t}\right)$, за последовавший затем $\Pi_1^{(n+m)}$-период не произошло «катастрофы» $\langle\bar{\pi}^{(n+m)}(s)\rangle$ и не произошло «катастрофы» за последовавший затем цикл ориентации $<\nu_2(s)>$.

Далее, очевидно,

$$\bar{\pi}_1^{(n+m)}(s)=[\bar{\pi}_1(s)]^{n+m}. \tag{2.10}$$

Подставляя (2.10) в (2.9), произведя суммирование, затем интегрирование, получаем (2.5). Соотношение (2.6) получается аналогично. h_{21} и $\overset{0}{h}_{21}$ получаются из (2.5) и (2.6) дифференцированием в нуле. ◐ На рис. 9 показано по одной реализации

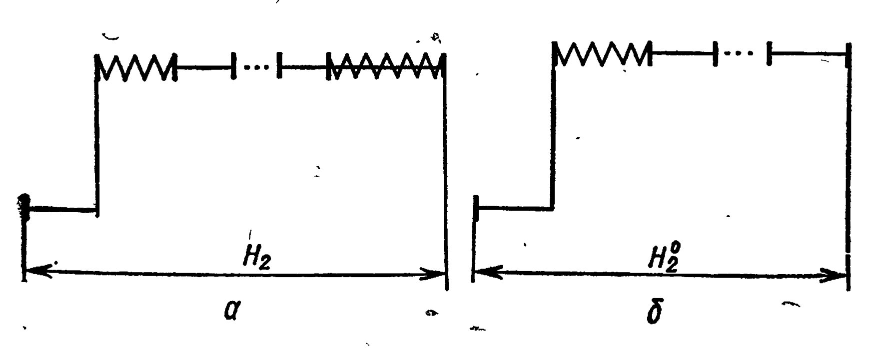


Рис. 9

цикла обслуживания и неполного цикла обслуживания.

Лемма 2.2.

$$\bar{\pi}_2^0(s)=\frac{\bar{\pi}_2^1(s)\,h_2^0(s+a_2)}{\bar{\pi}_2^1(s)\,[1-h_2^0(s+a_2)]-h_2^0(s+a_2-a_2\bar{\pi}_2^1(s))}, \tag{2.11}$$

$$\bar{\pi}_2^1(s) = h_2(s + a_2 - a_2\bar{\pi}_2^1(s)). \qquad (2.12)$$

Если $a_1\beta_{11} < 1$, $a_2h_{21} < 1$, *то*

$$\bar{\pi}_{21}^0 = \frac{(h_{21}^0 - h_{21})}{h_2^0(a_2)[1 - a_2h_{21}]}, \qquad (2.13)$$

$$\bar{\pi}_{21}^1 = \frac{h_{21}}{(1 - a_2h_{21})}, \qquad (2.14)$$

где h_{21} *и* h_{21}^0 *выражаются формулами* (2.7) *и* (2.8);

$$h_2^0(a_2),\ h^0(s + a_2),\ h_2^0(s + a_2 - \bar{a}_2\bar{\pi}^1(s)$$

и

$$h_2(s + a_2 - a_2\bar{\pi}_2^1(s))$$

определяются из (2.5) и (2.6) при $s = a_2$, $s + a_2$, $s + a_2 - a_2\bar{\pi}^1(s)$.

Доказательство. ◑ Пусть в системе имеется n a_2-вызовов. С каждым из этих n a_2-вызовов свяжем свой $\bar{\Pi}_2^1$-период (это можно сделать, так как порядок обслуживания — инверсионный). Обозначим через $\bar{\Pi}_2^{1(n)}$ промежуток времени, состояний из n таких $\bar{\Pi}_2^1$-периодов. Пусть $\bar{\Pi}_2^{1(n)}(t)$ ф. р. промежутка $\bar{\Pi}_2^{1(n)}$. Докажем соотношение

$$\bar{\pi}_2^0(s) = h_2^0(s + a_2) + \sum_{n \geqslant 1} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2t)^n}{n!} e^{-a_2t}\, dH_2^0(t) \times$$

$$\times\, \bar{\pi}_2^{1(n+1)}(s)\, \bar{\pi}^0(s).$$

Пусть за длительность $\bar{\Pi}_2^0$-периода не произошло «катастрофы» $\langle \bar{\pi}_2^0(s) \rangle$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

либо за длительность неполного цикла обслуживания не произошло «катастрофы» и не поступали a_2-вызовы $\langle h_2^0(s + a_2) \rangle$;

либо за длительность неполного цикла обслуживания $\langle dH_2^0(t) \rangle$ не произошло «катастрофы» $\langle e^{-st} \rangle$, поступило $n \geqslant 1$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2t)^n}{n!} e^{-a_2t} \right\rangle$ за $n-1$ $\bar{\Pi}_2^1$-периодов, связанных с каждым из

$n-1$ a_2-вызовов (из поступивших n) не произошло «катастрофы» $\langle\bar{\pi}_2^1(s)^{(n-1)}\rangle$ после чего $\bar{\Pi}_2^0$-период начинается заново и надо также, чтобы за его длительность не произошло «катастрофы» $\langle\bar{\pi}_2^0(s)\rangle$. Внеся

$$\bar{\pi}_2^{1(n-1)} = [\bar{\pi}_2^1(s)]^{n-1} = \frac{[\bar{\pi}_2^1(s)]^n}{\bar{\pi}^1(s)}$$

под интеграл, произведя суммирование и интегрирование, получаем (2.11). Аналогичными рассуждениями получаем (2.12). Выражения (2.13) и (2.14) получаются, как обычно, дифференцированием соотношений (2.11) и (2.12). ◐

§ 3

ПЕРИОД ЗАНЯТОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ С РЕЖИМОМ ОРИЕНТАЦИИ «СБРОС В НУЛЬ»

Теорема 2.1. *Для схем с полуотносительным и относительным приоритетом и режимом ориентации «сброс в нуль»*

а)

$$\sigma\pi(s) = a_1\pi_{21}(s) + a_2\pi_{22}(s),$$

$$\pi_{21}(s) = \pi_1(s + a_2) + [\pi_1(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2^1(s)]) -$$

$$- \pi_1(s + a_2)]\frac{\bar{\pi}_2^0(s)}{\bar{\pi}_2^1(s)}\nu_2(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2^1(s)]), \quad (2.15)$$

$$\pi_{22}(s) = \nu_2(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2^1(s)]\pi_0^0(s),$$

$$\pi_1(s) = c_{21}(s + a_1[1 - a_1\bar{\pi}_1(s)])\bar{\pi}_1(s), \quad (2.16)$$

где $\nu_2(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2^1(s)]$ *определяется из соответствующих выражений (2.1)—(2.4) при*

$$s = s + a_2 - a_2\bar{\pi}_2^1(s);\ \bar{\pi}_2^0(s)\ \textit{и}\ \bar{\pi}_2^1(s)$$

из соотношений (2.11) и (2.12) леммы 2.2;

б) Если $a_1\beta_{11} < 1$, $a_2h_{21} < 1$, *то*

$$\sigma\pi_1 = a_1\pi_{211} + a_2\pi_{221},$$

$$\pi_{211} = \frac{(\pi_{11} + \nu_{21}[1 - \pi_1(a_2)])'}{(1 - a_2 h_{21})} + [1 - \pi_1(a_2)][\bar{\pi}_{21}^0 - \bar{\pi}_{21}^1]$$

$$\pi_{221} = \frac{1}{1 - a_2 h_{21}} \left\{ \nu_{21} + \frac{h_{21}^0 - h_{21}}{h_2^0(a_2)} \right\},$$

$$\pi_{11} = \frac{(c_{211} + \beta_{11})}{(1 - a_1 \beta_{11})},$$

где ν_{21} *выражается соответствующими формулам* *(2.1)—(2.4);* h_{21} *и* h_{21}^0 *— формулами (2.7) и (2.8)* $\bar{\pi}_{21}^0$ и $\bar{\pi}_{21}^1$ *— формулами (2.13) и (2.14), а* $\pi_1(a_2$ *и* $h_2^0(a_2)$ *определяются из (2.16) и (2.6) при* $s=a$

Доказательство. ◑ Рассмотрим Π_{21}-пери од. Убедимся в справедливости равенства

$$\pi_{21}(s) = \pi_1(s + a_2) + \sum_{n\geq 1} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t} d\Pi_1^{-}(t) \times$$

$$\times \sum_{m \geq 0} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^m}{m!} e^{-a_2 t} dN_2(t) [\bar{\pi}_2^1(s)]^{m+n-1} \bar{\pi}_2^0(s).$$

Пусть за длительность Π_{21}-периода не произошл «катастрофы» $<\Pi_{21}(s)>$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

либо Π_{21}-период являлся Π_1-периодом и за вре мя его осуществления не произошло «катастрофы» $<\pi_1(s+a_2)>$;

либо за длительность Π_1-периода не произошл «катастрофы» $<e^{-st}>$, за это время поступил $n \geq 1$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t} \right\rangle$, за длительность на чавшегося затем цикла ориентации не произошл «катастрофы» $<e^{-st}>$, поступило $m \geq 0$ a_2-вызово $\left\langle \frac{(a_2 t)^m}{m!} e^{-a_2 t} \right\rangle$ за последовавшие затем $m+n-1$ $\bar{\Pi}_2^1$ -периоды, связанные с каждым из $m+n-1$ a_2-вызовов, не произошли «катастрофы» $\langle [\bar{\pi}_2^1(s)]^{m+n-1} \rangle$ и не произошло «катастрофы» з последовавший затем $\bar{\Pi}_2^0$-период $\langle \bar{\pi}_2^0(s) \rangle$.

Из последнего равенства после суммировани и интегрирования получаем (2.15). Остальные со

отношения теоремы либо получены выше (теоремы гл. 1), либо получаются аналогично. ◐

Две возможные реализации Π_{2i}-периода ($i=1, 2$) указаны на рис. 10 и 11.

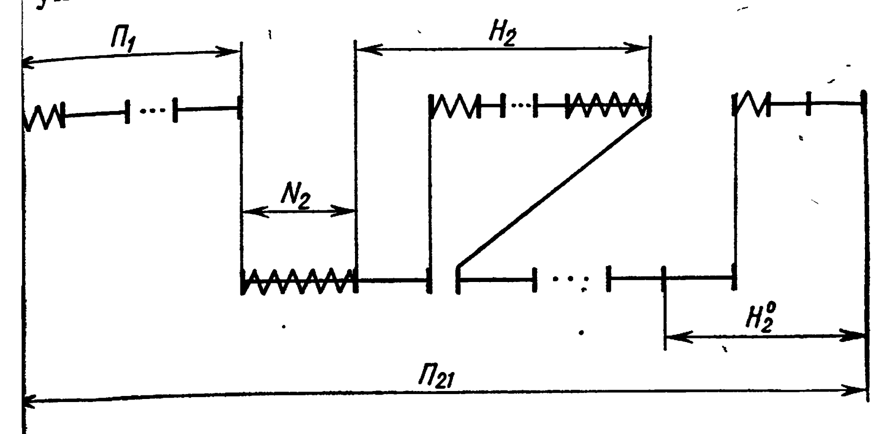


Рис. 10

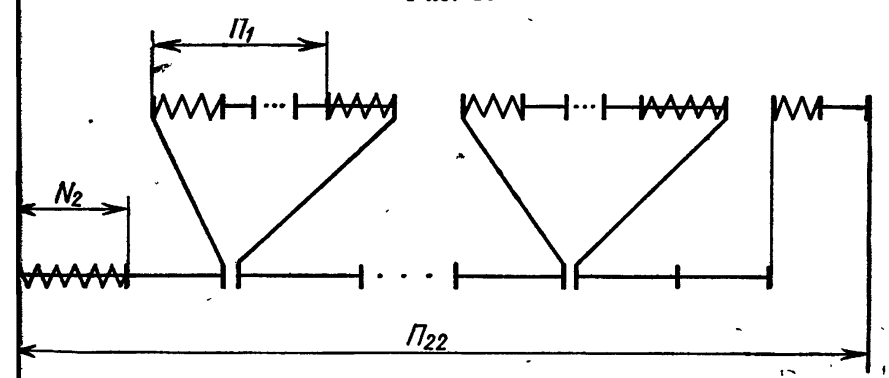


Рис. 11

§ 4
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ $\overline{\Pi}_2^{\Phi_l}$-ПЕРИОДА И Φ_l-ПЕРИОДА

Рассмотрим $\overline{\Pi}_2^0$-период. Очевидно, $\overline{\Pi}_2^0$-период может завершаться либо обслуживанием a_1-вызова, либо обслуживанием a_2-вызова. Пусть, далее, период занятости (здесь период занятости понимается в обычном смысле: период занятости — это промежуток времени, начинающийся с момента поступления вызова в свободную от вызовов систему и заканчивающийся сразу, как только система вновь становится свободной от вызовов) завершается моментом окончания $\overline{\Pi}_2^0$-периода и пусть

рассматриваются схемы с режимом ориентации «смотри вперед». Очевидно, что в случае, когда период занятости завершается $\overline{\Pi}_2^0$-периодом, и сам $\overline{\Pi}_2^0$-период обслуживанием a_2-вызова, нам необходимо сразу же начать ориентацию $(2 \longrightarrow 1)^0$. Другими словами, осуществить Φ_1-период. Такой $\overline{\Pi}_2^0$-период будем называть $\overline{\Pi}_2^{\Phi_1}$-периодом и преобразование Л.—С. его ф. р. будем обозначать $\overline{\pi}_2^{\varphi_1}(s)$. Аналогично, в том случае, когда $\overline{\Pi}_2^0$-период кончается обслуживанием a_1-*вызова и нам* необходимо сразу же осуществить Φ_2-период, будем говорить о $\overline{\Pi}_2^{\Phi_2}$-периоде. Преобразование Л.—С. ф. р. $\overline{\Pi}_2^{\Phi_2}$-периода обозначим $\overline{\pi}_2^{\varphi_2}(s)$.

Мы сейчас получим $\overline{\pi}_2^{\varphi_i}(s)$ $(i=1,2)$, которые будут играть важную вспомогательную роль при получении периода занятости для режимов «смотри вперед» и «жди наивероятного». Выражения для $\overline{\pi}_2^{\varphi_i}(s)$ (так же, как и выражения для $\varphi_i(s)$) полезны и сами по себе.

Покажем, что

$$\overline{\pi}_2^{\varphi_i}(s) = \beta_2(s+\sigma)\,\varphi_1(s) +$$

$$+ \sum_{n \geqslant 1} \int_0^\infty e^{-st} e^{-a_2 t} \frac{(a_1 t)^n}{n!} e^{-a_1 t} dB_2(t) \times$$

$$\times \sum_{m \geqslant 0} \int_0^\infty e^{-st} e^{-a_2 t} \frac{(a_1 t)^m}{m!} e^{-a_1 t} dC_{21}(t) \left[\overline{\pi}_1(s+a_2)\right]^{m+n} +$$

$$+ \sum \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t} dH_2^0(t) \left[\overline{\pi}_2^1(s)\right]^{n-1} \overline{\pi}_2^{\varphi_1}(s). \qquad (2.17)$$

Действительно, пусть за $\overline{\Pi}_2^{\Phi_1}$-период не произошло «катастрофы» $\langle \overline{\pi}_2^{\varphi_1}(s) \rangle$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

либо за длительность обслуживания a_2-вызова не поступили a_1- и a_2-вызовы и не произошло «катастрофы» $< \beta_2(s+\sigma) >$ и не произошло «катастрофы» также за последовавший затем Φ_1-период $< \varphi_1(s) >$;

либо за длительность обслуживания a_2-вызова $<dB_2(t)>$ не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, не поступили a_2-вызовы $\langle e^{-a_2t}\rangle$, поступило $n\geqslant 1$ a_1-вызовов $\left\langle \frac{(a_1t)^n}{n!} e^{-a_1t}\right\rangle$, после чего началась ориентация $(2\to 1)$, за время ее осуществления $<dC_{21}(t)>$ не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, не поступили a_2-вызовы $\langle e^{-a_2t}\rangle$, поступило $m\geqslant 0$ a_1-вызовов $\left\langle \frac{(a_1t)^m}{m!} e^{-a_1t}\right\rangle$, за $\overline{\Pi}_1$-периоды, связанные с каждым из $m+n$ имеющихся a_1-вызовов, не произошло «катастрофы» и не поступили a_2-вызовы $<[\overline{\pi}_1(s+a_2)]^{m+n}>$;

либо за длительность неполного цикла обслуживания $\langle dH_2^0(t)\rangle$ не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, поступило $n\geqslant 1$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2t)^n}{n!} e^{-a_2t}\right\rangle$, за $\overline{\Pi}_2^1$-периоды, связанные с каждым из $n-1$ a_2-вызовов (из имеющихся n), не произошло «катастрофы» $\langle[\overline{\pi}_2^1(s)]^{n-1}\rangle$ и не произошло «катастрофы» за начавшийся заново $\overline{\Pi}_2^{\Phi_1}$-период $\langle\overline{\pi}_2^{\varphi_1}(s)\rangle$.

Из последнего соотношения (произведя там, где нужно, суммирование и интегрирование) находим

$$\pi_2^{\varphi_1}(s) = \frac{\{\beta_2(s+\sigma)\varphi_1(s)+c_{21}(\xi(s+a_2))[\beta_2(\xi(s+a_2))-\beta_2(s+\sigma)]\}\,\overline{\pi}_2^1(s)}{\overline{\pi}_2^1(s)-h_2^0(\eta^1(s))+h_2^0(s+a_2)}, \tag{2.18}$$

где обозначено

$$\xi(s)=s+a_1-a_1\overline{\pi}_1(s),\quad \eta^1(s)=s+a_2-a_2\overline{\pi}_2^1(s), \tag{2.19}$$

а $\varphi_1(s)$ будет получено ниже.

Средняя длина $\overline{\Pi}_2^{\Phi_1}$-периода находится из (2.18) и равна

$$\overline{\pi}_2^{\varphi_1} = \frac{\beta_2(\sigma)\varphi_{11}+h_{21}^0(1+a_2\overline{\pi}_{21}^1)+\overline{\pi}_{21}^1[1-h_2^0(a_2)]}{h_2^0(a_2)}, \tag{2.20}$$

где h_{21}^0 и $\overline{\pi}_{21}^1$ получены в § 2, $h_2^0(a_2)$ определяется из (2.5) при $s=a_2$, а выражение для φ_{11} будет приведено ниже.

Получим $\varphi_1(s)$. Аналогичными вероятностными рассуждениями, что были проведены в § 5 гл. 1 при получении $\varphi_1(s)$ для схем с абсолютным и полуабсолютным приоритетом, можно показать, что

$$\varphi_1(s) = c_{21}(s+\sigma) +$$

$$+\sum_{n\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-st}e^{-a_2t}\frac{(a_1t)^n}{n!}e^{-a_1t}\,dC_{21}(t)\,[\overline{\pi}_1(s+a_2)]^n +$$

$$+\sum_{m\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-st}e^{-a_2t}\frac{(a_2t)^m}{m!}e^{-a_2t}\,dC_{21}(t)\,\nu_2(s+a_2[1-$$

$$-\overline{\pi}_2^1(s)])\,[\overline{\pi}_2^1(s)]^{m-1}\,\overline{\pi}_2^{\varphi_1}(s) +$$

$$+\sum_{m\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^m}{m!}e^{-a_2t}\,d\widehat{\Pi}(t)\,\overline{\pi}_2^{1(m-1)}(s)\times$$

$$\times\,\nu_2(s+a_2[1-\overline{\pi}_2^1(s)])\,\overline{\pi}_2^{\varphi_1}(s).$$

Произведя суммирование и интегрирование и воспользовавшись выражением (1.37) для $\widehat{\pi}(s)$ (см. § 5 гл. 1), получим

$$\varphi_1(s) = c_{21}(s+a_2+a_1[1-\overline{\pi}_1(s+a_2)]) +$$

$$+\{c_{21}(s+a_2[1-\overline{\pi}_2^1(s)]+a_1[1-\overline{\pi}_1(s+$$

$$+a_2[1-\overline{\pi}_2^1(s)])]) - c_{21}(s+a_2+a_1[1-\overline{\pi}_1(s+$$

$$+a_2)])\}\,\nu_2(s+a_2[1-\overline{\pi}_2^1(s)])\,[\overline{\pi}_2^1(s)]^{-1}\,\overline{\pi}_2^{\varphi_1}(s).$$

Воспользовавшись соотношением (2.18) и обозначениями (2.19), окончательно получим следующий результат, который запишем в виде леммы.

Лемма 2.3. *Для схем с полуотносительным и относительным приоритетом*

$$\varphi_1(s) =$$

$$=\Big\{c_{21}(\xi(s+a_2)) + \frac{c_{21}(\xi(s+a_2))\,[\beta_2(\xi(s+a_2))-\beta_2(s+\sigma)]}{\overline{\pi}_2^1(s)-h_2^0(\eta^1(s))+h_2^0(s+a_2)}\times$$

$$\times [c_{21}(\xi(\eta^1(s)) - c_{21}(\xi(s+a_2))]\, \nu_2(\eta^1(s))\Big\} \times$$

$$\times \left\{1 - \frac{[c_{21}(\xi(\eta^1(s))) - c_{21}(\xi(s+a_2))]\cdot\beta_2(s+\sigma)}{\bar{\pi}_2^1(s) - h_2^0(\eta^1(s)) + h_2^0(s+a_2)}\, \nu_2(\eta^1(s))\right\}^{-1}, \tag{2.21}$$

где положено

$$\xi(s) = s + a_1 - a_1\bar{\pi}_1(s),\quad \eta^1(s) = s + a_2 - a_2\bar{\pi}_2^1(s).$$

Средняя длина Φ_1-периода находится, как обычно, и равна

$$\varphi_{11} = \frac{[1 - c_{21}(\xi(a_2))]\{R(1+\nu_{21}) + \bar{\pi}_{21}^1\} - Rc_{211}(1 + a_1\bar{\pi}_{11})}{h_2^0(a_2) - \beta_2(\sigma)[1 - c_{21}(\xi(a_2))]}, \tag{2.22}$$

где обозначено $R = h_2^0(a_2)(1 + a_2\bar{\pi}_{21}^1)$.

Для получения $\bar{\pi}_2^{\varphi_2}(s)$ можно написать равенство, аналогичное (2.17),

$$\bar{\pi}_2^{\varphi_2}(s) = \beta_2(s+\sigma) + \sum_{n\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-st}e^{-a_2t}\frac{(a_1t)^n}{n!}e^{-a_1t}dB_2(t)\times$$

$$\times \sum_{m\geqslant 0}\int_0^\infty e^{-st}e^{-a_2t}\frac{(a_1t)^m}{m!}e^{-a_1t}dC_{21}(t)[\bar{\pi}_1(s+a_2)]^{m+n}\varphi_2(s) +$$

$$+ \sum_{n>1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}dH_2^0(t)[\bar{\pi}_2^1(s)]^{n-1}\bar{\pi}_2^{\varphi_2}(s),$$

откуда, произведя суммирование и интегрирование (предварительно внеся $[\bar{\pi}_2^1(s)]^{n-1}$ под интеграл), находим

$$\bar{\pi}_2^{\varphi_2}(s) = \frac{\{\beta_2(s+\sigma) + c_{21}(\xi(s+a_2))[\beta_2(\xi(s+a_2)) - \beta_2(s+\sigma)]\,\varphi_2(s)\}\,\bar{\pi}_2^1(s)}{\bar{\pi}_2^1(s) - h_2^0(\eta(s)) + h_2^0(s+a_2)}. \tag{2.23}$$

Средняя длина $\overline{\Pi}_2^{\Phi_2}$-периода равна

$$\bar{\pi}_{21}^{\varphi_2} = \{c_{21}(\xi(a_2))[\beta_2(\xi(a_2)) - \beta_2(\sigma)]\varphi_{21} + h_{21}^0(1 + a_2\bar{\pi}_{21}^1) + \bar{\pi}_{21}^1[1 - h_2^0(a_2)]\}(h_2^0(a_2))^{-1}. \quad (2.24)$$

Получим участвующие в (2.23) и (2.24) $\varphi_2(s)$, φ_{21}.

Учитывая строение Φ_2-периода и $\overline{\Pi}_2^{\Phi_2}$-период можно убедиться, что выполняется равенство

$$\varphi_2(s) = \nu_2(s + a_2) + \sum_{n\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}dN_2(t) \times \times [\bar{\pi}_2^1(s)]^{n-1}\bar{\pi}_2^{\varphi_2}(s),$$

откуда с учетом (2.23) находим выражение дл $\varphi_2(s)$. Этот результат мы также сформулируем виде леммы.

Лемма 2.4. *Для схем с полуотносительным относительным приоритетом*

$$\varphi_2(s) = \left\{\nu_2(s + a_2) + \frac{[\nu_2(\eta^1(s)) - \nu_2(s + a_2)]\beta_2(s + \sigma)}{\bar{\pi}_2^1(s) - h_2^0(\eta^1(s)) + h_2^0(s + a_2)}\right\} \times$$

$$\times \left\{1 - \frac{[\nu_2(\eta'(s)) - \nu_2(s + a_2)]c_{21}(\xi(s + a_2)) \times [\beta_2(\xi(s + a_2)) - \beta_2(s + \sigma)]}{\bar{\pi}_2^1(s) - h_2^0(\eta^1(s)) + h_2^0(s + a_2)}\right\}^{-1},$$

где $\xi(s) = s + a_1 - a_1\bar{\pi}_1(s)$, $\eta^1(s) = s + a_2 - a_2\bar{\pi}_2^1(s$

Наконец, приведем выражение для φ_{21}, котор получается из $\varphi_2(s)$ дифференцированием в ну

$$\varphi_{21} = \{h_2^0(a_2)[\nu_{21}(1 + a_2\bar{\pi}_{21}^1) - [1 - \nu_2(a_2)]\bar{\pi}_{21}^1] + [1 - \nu_2(a_2)]h_{21}^0(1 + a_2\bar{\pi}_{21}^1) + \bar{\pi}_{21}^1[1 - h_2^0(a_2)]\}h_2^{-1}(a \quad (2.2$$

§ 5

ПЕРИОД ЗАНЯТОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ С РЕЖИМОМ ОРИЕНТАЦИИ «СМОТРИ ВПЕРЕД» И «ЖДИ НАИВЕРОЯТНОГО»

Теорема 2.2. *Для схем 1.5, 2.5, 3.5, 4.5 и режимом ориентации «смотри вперед»*

а)

$$\sigma\pi(s) = a_1\pi_{21}(s) + a_2\pi_{22}(s),$$

$$\pi_{21}(s) = \bar{\pi}_1(s + a_2) + [\bar{\pi}_1(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2^1(s)]) -$$

$$- \bar{\pi}_1(s + a_2)]\frac{\bar{\pi}_2^{\varphi_1}(s)}{\bar{\pi}_2^1(s)}\nu_2(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2^1(s)]), \quad (2.26)$$

$$\pi_{22}(s) = \bar{\nu}_2(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2^1(s)])\bar{\pi}_2^{\varphi_1}(s),$$

где для каждой из схем $\nu_2(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2^1(s)])$ *определяется из соотношений (2.1) — 2.4) соответственно при* $s = s + a_2[1 - \bar{\pi}_2^1(s)]$; $\bar{\pi}_2^{\varphi_1}(s)$ — *из соотношения (2.18), а*

$$\bar{\pi}_1(s + a_2),\ \bar{\pi}_1(s + a_2 - a_2\bar{\pi}_2^1(s)) \text{ и } \bar{\pi}_2^1(s)$$

определяются из функциональных уравнений (1.1) и (2.12) при $s = s + a_2$ *и* $s = s + a_2 - a_2\bar{\pi}_2^1(s)$;

б) При $a_1\beta_{11} < 1$, $a_2h_{21} < 1$ *выполняется*

$$\sigma\pi_1 = a_1\pi_{211} + a_2\pi_{221},$$

$$\pi_{211} = \frac{\bar{\pi}_{11} + \nu_{21}[1 - \bar{\pi}_1(a_2)]}{1 - a_2h_{21}} + [1 - \bar{\pi}_1(a_2)][\bar{\pi}_{21}^{\varphi_1} - \bar{\pi}_{21}^1],$$

$$\pi_{221} = \frac{\nu_{21}}{(1 - a_2h_{21})} + \bar{\pi}_{21}^{\varphi_1}, \quad \bar{\pi}_{11} = \frac{\beta_{11}}{(1 - a_1\beta_{11})},$$

где ν_{21} *для каждой из схем определяются из соответствующих соотношений (2.1′)—(2.4′);* h_{21}, $\bar{\pi}_{21}$ *и* $\bar{\pi}_{21}^{\varphi_1}$ *определяются из соотношений (2.7), (2.14) и (2.20);* $\pi_1(a_2)$ *из (1.1) при* $s = a_2$.

Доказательство. ◑ Исходя из вероятного смысла Π_{21}-периода для рассматриваемых схем и данного режима ориентации можно показать, что выполняется равенство

$$\pi_{21}(s)=\bar{\pi}_1(s+a_2)+\sum_{n\geqslant 1}\int\limits_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}d\bar{\Pi}_1(t)\times$$

$$\times\sum_{m\geqslant 0}\int\limits_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^m}{m!}e^{-a_2t}\,dN_2(t)\,[\bar{\pi}_2^1(s)]^{m+n-1}\,\bar{\pi}_2^{\varphi_1}(s).$$

Действительно, для этого следует прочитать дока- зательство аналогичного соотношения теоремы 2.1, заменив всюду Π_1-период на $\bar{\Pi}_1$-период и $\bar{\Pi}_2^0$ -период на $\bar{\Pi}_2^{\Phi_1}$ -период. Из приведенного равенст- ва и следует (2.26).

Остальные соотношения либо получены выше, либо получаются аналогично, что и выше. ◐

Т е о р е м а 2.3. *Для схем 1.5, 2.5, 3.5, 4.5 и ре- жимом ориентации «жди наивероятного»*

а)

$$\sigma\pi(s)=\begin{cases}a_1\pi_{21}^{[1]}(s)+a_2\pi_{22}^{[1]}(s) & при\ a_1\geqslant a_2,\\ a_1\pi_{21}^{[2]}(s)+a_2\pi_{22}^{[2]}(s) & при\ a_1<a_2,\end{cases}$$

$$\pi_{21}^{[1]}(s)=\bar{\pi}_1(s+a_2)+[\bar{\pi}_1(s+a_2[1-\bar{\pi}_2^1(s)])-$$

$$-\bar{\pi}_1(s+a_2)]\frac{\bar{\pi}_2^{\varphi_1}(s)}{\bar{\pi}_2^1(s)}\nu_2(s+a_2[1-\bar{\pi}_2^1(s)]),$$

$$\pi_{22}^{[1]}=\nu_2(s+a_2[1-\bar{\pi}_2^1(s)])\,\bar{\pi}_2^{\varphi_1}(s),$$

$$\pi_{21}^{[2]}=\pi_1(s+a_2)\,\varphi_2(s)+[\pi_1(s+a_2[1-\pi_2^1(s)])-$$

$$-\pi_1(s+a_2)]\frac{\bar{\pi}_2^{\varphi_2}(s)}{\bar{\pi}_2^1(s)}\nu_2(s+a_2[1-\bar{\pi}_2^1(s)]),\qquad (2.27$$

$$\pi_{22}^{[2]}(s)=\bar{\pi}_2^{\varphi_2}(s),\qquad (2.28$$

$$\pi_1(s)=c_{21}(s+a_1[1-\bar{\pi}_1(s)])\,\bar{\pi}(s),\qquad (2.29$$

$$\bar{\pi}_1(s)=\beta_1(s+a_1-a_1\bar{\pi}_1(s)),$$

где $\nu_2(s+a_2[1-\bar{\pi}_2^1(s)])$ *для каждой из схем опре- деляются из (2.1)—(2.4) при* $s=s+a_2-a_2\bar{\pi}_2^1(s)$; $\bar{\pi}_2^{\varphi_1}(s)$, $\bar{\pi}_2^{\varphi_2}(s)$ *и* $\varphi_2(s)$ *определяются из (2.18), (2.23)*

из леммы 2.4; $\overset{-1}{\pi}_2(s)$ — *из (2.13);*

б) При $a_1\beta_{11}<1$, $a_2h_2<1$ *выполняется*

$$\sigma\pi_1 = \begin{cases} a_1\pi_{211}^{[1]} + a_2\pi_{221}^{[1]} \text{ при } a_1 \geqslant a_2, \\ a_1\pi_{211}^{[2]} + a_2\pi_{221}^{[2]} \text{ при } a_1 < a_2, \end{cases}$$

$$\pi_{211}^{[1]} = \frac{\bar{\pi}_{11} + \nu_{21}[1 - \pi_1(a_2)]}{1 - a_2h_{21}} + [1 - \bar{\pi}_1(a_2)][\pi_{21}^{\varphi_1} - \overset{-1}{\pi}_{21}],$$

$$\pi_{221}^{[1]} = \frac{\nu_{21}}{(1 - a_2h_{21})} + \bar{\pi}_{21}^{\varphi_1},$$

$$\pi_{211}^{[2]} = \frac{\nu_{21}[1 - \pi_1(a_2)] + \pi_{11}}{1 - a_2h_{21}} +$$

$$+ [1 - \pi_1(a_2)]\bar{\pi}_{21}^{\varphi_2} + \pi_1(a_2)\varphi_{21},$$

$$\pi_{221}^{[2]} = \bar{\pi}_{21}^{\varphi_2},\ \bar{\pi}_{11} = \frac{\beta_{11}}{(1 - a_1\beta_{11})},\ \pi_{11} = \frac{(c_{211} + \beta_{11})}{(1 - a_1\beta_{11})},$$

где $\overset{-1}{\pi}_{21}$, $\pi_{21}^{\varphi_1}$, $\pi_{21}^{\varphi_2}$ *и* φ_{21} *определяются из соотношений (2.14), (2.20), (2.24) и (2.25), а* $\bar{\pi}_1(a_2)$ *и* $\pi_1(a_2)$ *из (1.1) и (2.29) при* $s=a_2$.

Доказательство. ◑ При $a_1 \geqslant a_2$, как уже отмечено, режим «жди наивероятного» есть режим ориентации «смотри вперед», следовательно, соотношения с индексом «[1]» уже получены при доказательстве теоремы 2.2.

Соотношение (2.27) следует из выражения

$$\pi_{21}^{[2]}(s) = \pi_1(s + a_2)\varphi_2(s) +$$

$$+ \sum_{n \geqslant 1} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2t)^n}{n!} e^{-a_2t} d\Pi_1(t) \times$$

$$\times \sum \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2t)^m}{m!} e^{-a_2t} dN_2(t) [\overset{-1}{\pi}_2(s)]^{m+n-1} \pi_2^{\varphi_2}(s),$$

которое доказывается так же, как аналогичное выражение для $\pi_{21}(s)$ теоремы 2.1. Соотношение (2.28) очевидно. Остальные соотношения либо получены выше, либо получаются так же, как и выше. ◐

Глава 3

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОЧЕРЕДИ. АБСОЛЮТНЫЙ И ПОЛУАБСОЛЮТНЫЙ ПРИОРИТЕТ

§ 1

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Условимся считать каждый поступающий вызов либо красным, либо синим, причем произвольный вызов, независимо от цвета остальных вызовов, объявляется красным с вероятностью z_i, если он является a_i-вызовом $(i=1, 2)$. Пусть, кроме того, независимо от функционирования системы происходят «катастрофы», поток которых является пуассоновским с параметром $s>0$. Тогда, если $P_m(t)$ есть вероятность того, что в момент t в системе находятся $m=(m_1, m_2)$ вызовов, где m_i — число a_i-вызовов, $z=(z_1, z_2)$ и $z^m = z_1^{m_1}\cdot z_2^{m_2}$, то $P(z_1 t) = \sum\limits_{m\geqslant 0} P_m(t)\cdot z^m$ — есть вероятность того, что в момент t в системе находятся разве лишь красные вызовы; $sp(z, s) = s\int\limits_0^\infty e^{-st} P(z, t)\,dt$ — вероятность того, что первая «катастрофа» произошла в момент, когда в системе нет синих вызовов.

Для получения основных соотношений потребуется несколько лемм, для чего введем еще некоторые обозначения.

Промежуток назовем отдельно взятым или просто отдельным промежутком, если время отсчитывается с его начала. Пусть цикл ориентации, цикл обслуживания, Π_1-период, Π_{2k}-период и т. д. — отдельные промежутки. Через $s\nu_2(z, s)$, $sh_2(z, s)$, $s\pi_1(z, s)$, $s\pi_{2k}(z, s)$ и т. д. будем обозначать ве-

роятность того, что первая «катастрофа» произошла на отдельном цикле ориентации (цикле обслуживания, Π_1-периоде, Π_{2k}-периоде и т. д.) в момент, когда в системе находятся разве лишь красные вызовы. Положим еще

$$[\ ]_1 = a_1(1-z_1)+a_2(1-z_2);\ [\ ]_2 = a_2(1-z_2). \quad (3.1)$$

Обозначения (3.1) имеют следующий очевидный смысл. $[\ ]_1$ — параметр пуассоновского суммарного потока синих a_1- и a_2-вызовов; $[\ ]_2$ — параметр пуассоновского потока синих a_2-вызовов.

Отметим, что распределение длины очереди систем (как будет показано в § 5—7) выразится через распределение длины очереди на отдельном периоде занятости. Распределение же длины очереди на отдельном периоде занятости — через распределение длины очереди на отдельном Π_1-периоде и отдельных циклах ориентации и обслуживания. Получению этих вспомогательных соотношений и будут посвящены § 2—4. В этих параграфах будут получены преобразования Лапласа по времени производящих функций совместного распределения числа вызовов каждого приоритета, находящихся в системе в любой момент времени отдельного Π_1-периода ($\pi_1(z,s)$), отдельного цикла ориентации ($\nu_2(z, s)$) и отдельного цикла обслуживания ($h_2(z, s)$).

§ 2
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОЧЕРЕДИ НА ОТДЕЛЬНОМ Π_1-ПЕРИОДЕ

Лемма 3.1. *Для всех схем функция* $\pi_1(z, s)$ *определяется из соотношения*

$$\pi_1(z, s) = \frac{1}{s+[\ ]_1}\Big\{1-c_{21}(s+[\ ]_1)+$$
$$+z_1\frac{1-\beta_1(s+[\ ]_1)}{z_1-\beta_1(s+[\ ]_1)}[z_1\cdot c_{21}(s+[\ ]_1-\bar{\pi}_1(s+[\ ]_2)\times$$
$$\times c_{21}(s+[\ ]_2+a_1[1-\bar{\pi}_1(s+[\ ]_2)])]\Big\},$$

где

$\bar{\pi}_1(s+[\ ]_2)=\beta_1(s+[\ ]_2+a_1[1-\bar{\pi}_1(s+[\ ]_2)])$. (3.2)

Доказательство. ◑ Убедимся, что справедливо соотношение

$$s\pi_1(z, s)=sc_{21}(z, s)+$$
$$+\sum_{n\geqslant 0} s\,\bar{\pi}_1^{(n+1)}(z, s)\int_0^\infty e^{-st}e^{-[\ ]_2 t}\frac{(a_1t)^n}{n!}e^{-a_1t}\,dC_{21}(t). \qquad (3.3)$$

Действительно, левая часть есть вероятность того, что на отдельном Π_1-периоде первая «катастрофа» произошла в момент, когда в системе разве лишь красные вызовы. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

либо первая «катастрофа» произошла на отдельном промежутке ориентации (2⟶1) в момент, когда в системе разве лишь красные вызовы $\langle sc_{21}(z, s)\rangle$;

либо ориентация (2⟶1) длилась время $t\ \langle dC_{21}(t)\rangle$, за это время не произошло «катастрофы» $\langle e^{-st}\rangle$ и не поступили синие a_2-вызовы $\langle e^{-[\ ]_2 t}\rangle$, поступило $n\geqslant 0$ a_1-вызовов $\left\langle\frac{(a_1t)^n}{n!}e^{-a_1t}\right\rangle$ и первая «катастрофа» произошла на отдельном $\Pi_1^{(n+1)}$-периоде в момент, когда в системе разве лишь красные вызовы $\langle s\,\bar{\pi}_1^{(n+1)}(z, s)\rangle$. Для нахождения вероятностей $s\bar{\pi}^{(n+1)}(z, s)$ воспользуемся леммой 1 [7], которая выражает вероятности $s\bar{\pi}_k^m(z, s)$ через $sh_k(z, s)$. Указанная лемма в наших обозначениях формулируется так:

$$s\bar{\pi}_k^{(m)}(z, s)=sh_k(z, s)\frac{z_k^m-[\bar{\pi}_k(s+[\ ]_{k+1})]^m}{z_k-h_k(s+[\ ]_k)}, \qquad (3.4)$$

где при $k=1$

$$sh_1(z, s)=s\beta_1(z, s)=sz_1\frac{1-\beta_1(s+[\ ]_1)}{s+[\ ]_1}.$$

Подставляя во второе слагаемое (3.3) вместо $s\bar{\pi}_1(z, s)$ его выражение, заданное равенством (3.4)

при $m=n+1$ и $k=1$, произведя суммирование под интегралом, а затем интегрирование, получаем

$$sz_1 \frac{1-\beta_1(s+[\ ]_1)}{\{s+[\ ]_1\}[z_1-\beta_1(s+[\ ]_1)]}\{z_1 c_{21}(s+[\ ]_1)-$$

$$-\bar{\pi}_1(s+[\ ]_2)c_{21}(s+[\ ]_2+a_1[1-\bar{\pi}_1(s+[\ ]_2)])\}.$$

Наконец, учитывая вероятностный смысл $sc_{21}(z, s)$, находим

$$sc_{21}(z, s)=\int_0^{\infty} e^{-[\ ]_1 t}[1-C_{21}(t)]se^{-st}\,dt=s\frac{1-c_{21}(s+[\ ]_1)}{s+[\ ]_1}. \tag{3.5}$$

Сумма последних двух соотношений и дает $\pi_1(z, s)$. ◐

§ 3
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОЧЕРЕДИ НА ОТДЕЛЬНОМ ЦИКЛЕ ОРИЕНТАЦИИ

Лемма 3.2. *Для схем 1.1—1.4 функция* $\nu_2(z, s)$ *определяется из соотношения*

$$\nu_2(z, s)=\frac{[1-c_{12}(s+[\ ]_2+a_1)][1+a_1\pi_1(z, s)]}{s+[\ ]_2+a_1-a_1[1-c_{12}(s+[\ ]_2+a_1)]\,\pi_1(s+[\ ]_2)},$$

где

$$\pi_1(s+[\ ]_2)=c_{21}(s+[\ ]_2+$$

$$+a_1[1-\bar{\pi}_1(s+[\ ]_2)])\,\bar{\pi}_1(s+[\ ]_2), \tag{3.6}$$

$\pi_1(z, s)$ *определяется леммой 3.1, а* $\bar{\pi}_1(s+[\ ]_2)$ — *из соотношения (3.2).*

Доказательство. ◑ Строение цикла ориентации для схем 1.1—1.4 рассматривалось в доказательстве леммы 1.1. Данные там определения и обозначения концевого (неконцевого) промежутка ориентации сохраняются. Докажем равенство

$$s\nu_2(z, s)=\int_0^{\infty}[C_{12}^k(\infty)-C_{12}^k(t)]\,e^{-[\ ]_2 t}se^{-st}\,dt+$$

$$+\int_0^\infty [C_{12}^H(\infty)-C_{12}^H(t)]\,e^{-[\ ]_2 t}se^{-st}\,dt+$$

$$+c_{12}^H(s+[\ ]_2)\cdot s\pi_1(z,s)+$$

$$+c_{12}^H(s+[\ ]_2)\pi_1(s+[\ ]_2)\cdot s\nu_2(z,s). \qquad (3.7)$$

Для того чтобы первая «катастрофа» произо- шла на отдельном цикле ориентации в момент, когда в системе нет синих вызовов $<s\nu_2(z,s)>$, необходимо и достаточно, чтобы

либо первая «катастрофа» произошла на кон- цевом промежутке ориентации в момент, когда он еще не закончился $\langle[C_{12}^k(\infty)-C_{12}^k(t)]\,se^{-st}\,dt\rangle$ и до момента «катастрофы» не было синих a_2-вызовов $\langle e^{-[\ ]_2 t}\rangle$;

либо первая «катастрофа» произошла на некон- цевом промежутке ориентации в момент, когда он еще не закончился $\langle[C_{12}^H(\infty)-C_{12}^H(t)]\,se^{-st}\,dt\rangle$ и до момента «катастрофы» не было синих a_2-вызовов $\langle e^{-[\ ]_2 t}\rangle$;

либо за длительность неконцевого промежутка ориентации не произошло «катастрофы» и не по- ступило синих a_2-вызовов $\langle c_{12}^H(s+[\ ]_2\rangle$; первая «катастрофа» произошла на отдельном Π_1-периоде в момент, когда в системе разве лишь красные вы- зовы $<s\pi_1(z,s)>$;

либо за длительность неконцевого промежутка ориентации не произошло «катастрофы» и не по- ступило синих a_2-вызовов $\langle c_{12}^H(s+[\ ]_2)\rangle$, за по- следовавший затем Π_1-период также не произошло «катастрофы» и не поступило синих a_2-вызовов $<\pi_1(s+[\ ]_2)>$ и первая «катастрофа» произошла на начавшемся заново цикле ориентации в момент, когда в системе нет синих вызовов $<s\nu_2(z,s)>$.

Из (3.7) получаем

$$\nu_2(z,s)=\left\{\frac{1-c_{12}^k(s+[\ ]_2)-c_{12}^H(s+[\ ]_2)}{s+[\ ]_2}+\right.$$

$$\left.+c_{12}^H(s+[\ ]_2)\pi_1(z,s)\right\}[1-c_{12}^H(s+[\ ]_2)\pi_1(s+[\ ]_2)]^{-1}, \qquad (3.8)$$

откуда с учетом (1.4) и (1.5) получаем требуемое соотношение. ◐

Лемма 3.3. *Для схем 2.1—2.4 функция* $\nu_2(z, s)$ *определяется из соотношения*

$$\nu_2(z, s) = \frac{1 - c_{12}(s + [\ ]_2 + a_1[1 - \pi_1(s + [\ ]_2)])}{s + [\ ]_2 + a_1[1 - \pi_1(s + [\ ]_2)]} \times$$

$$\times [1 + a_1 \pi_1(z, s)],$$

где $\pi_1(s+[\ ]_2$ *и* $\pi_1(z,s)$ *задаются соотношением (3.6) и леммой 3.1.*

Доказательство. ◑ Прерывающий вызов назовем «$_*\Pi_1$-хорошим», если за Π_1-период, порожденный им, не произойдет «катастрофы» и не поступит синих a_2-вызовов; «$_*\Pi_1$-плохим», если не выполняется хотя бы одно из указанных условий. Вероятность того, что прерывающий вызов «$_*\Pi_1$-хороший», очевидно, равна $\pi_1(s+[\ ]_2)$ (поток «катастроф» и поток синих a_2-вызовов — независимые пуассоновские потоки с параметрами s и $[\ ]_2$ соответственно). Вероятность, что прерывающий вызов «$_*\Pi_1$-плохой» — $1-\pi_1(s+[\ ]_2)$. Поток «$_*\Pi_1$-плохих» вызовов — пуассоновский с параметром $a_1[1-\pi_1(s+[\ ]_2)]$. Теперь доказательство леммы получается из выражения

$$s\nu_2(z, s) = \int_0^\infty [1 - C_{12}(x)]\, e^{-[\ ]_2 x} e^{-a_1[1-\pi_1(s+[\ ]_2)]x} s e^{-sx} dx +$$

$$+ \int_{0^-}^\infty [1 - C_{12}(x)]\, e^{-[\ ]_2 x} e^{-a_1[1-\pi_1(s+[\ ]_2)]x} e^{-sx} \times$$

$$\times a_1 dx \cdot s\pi_1(z, s), \qquad (3.9)$$

которое доказывается следующим образом. Пусть x — время, отсчитываемое только тогда, когда прибор занят ориентацией $(1\to2)$, и пусть первая «катастрофа» произошла на отдельном цикле ориентации в момент, когда в системе нет синих вызовов $\langle s\nu_2(z, s)\rangle$.

Для этого необходимо и достаточно, чтобы

либо первая «катастрофа» произошла во время ориентации $(1\to2)$ $\langle[1 - C_{12}(x)]\, se^{-sx} dx\rangle$,

до момента «катастрофы» не было синих a_2-вызовов $\langle e^{-[\ ]_2 x}\rangle$ и «$_*\Pi_1$-плохих» прерывающих вызовов $\langle e^{-a_1[1-\pi_1(s+[\ ]_2)]x}\rangle$;

либо во время ориентации $(1\to2)$ поступил a_1-вызов $<[1-C_{12}(x)]a_1dx>$, за время x не произошло «катастрофы» $<e^{-sx}>$, не поступили синие a_2-вызовы $\langle e^{-[\ ]_2 x}\rangle$, поступали разве лишь «$_*\Pi_1$-хорошие» прерывающие вызовы $\langle e^{-a_1[1-\pi_1(s+[\ ]_2)]x}\rangle$ и первая «катастрофа» произошла на отдельном Π_1-периоде в момент, когда в системе нет синих вызовов $<s\pi_1(z, s)>$. ◐

Лемма 3.4. *Для схем 3.1—3.4 функция $\nu_2(z, s)$ определяется из соотношения*

$$\nu_2(z, s) = [1 + a_1\pi_1(z, s)] \times$$
$$\times \int_0^\infty \frac{\{1 - e^{-(s+a_1+[\ ]_2)\tau}\}\, dC_{12}(\tau)}{s + [\ ]_2 + a_1 - a_1\pi_1(s + [\ ]_2)\,[1 - e^{-(s+a_1+[\ ]_2)\tau}]}, \tag{3.10}$$

где $\pi_1(s+[\ ]_2)$ и $\pi_1(z, s)$ задаются соотношением (3.6) и леммой 3.1.

Доказательство. ◑ При условии, что длительность ориентации $(1\to2)$ есть фиксированная величина τ, как при доказательстве леммы 3.2, получаем соотношение, аналогичное формуле (3.8)

$$\nu_2(z, s) = \left\{\frac{1 - c_{12}^k(s + [\ ]_2;\ \tau) - c_{12}^H(s + [\ ]_2;\ \tau)}{s + [\ ]_2} + \right.$$
$$\left. + c_{12}^H(s + [\ ]_2;\ \tau)\,\pi_1(z, s)\right\} \times$$
$$\times [1 - c_{12}^H(s + [\ ]_2;\ \tau)\,\pi_1(s + [\ ]_2)]^{-1}.$$

Подставив (1.10) и (1.11) при $s = s + [\ ]_2$ в последнее соотношение и проинтегрировав его по мере $dC_{12}(\tau)$, получаем (3.10). ◐

Лемма 3.5. *Для схем 4.1—4.4*

$$\nu_2(z, s) = \left\{\left[\frac{1 - c_{12}(s + [\ ]_2)}{s + [\ ]_2} + \frac{1 - c_{21}[s + [\ ]_1)d(s, z)}{s + [\ ]_1}\right] + \right.$$
$$\left. + z_1\frac{[1 - \beta_1(s + [\ ]_1)]\,[d(s, z)\,c_{21}(s + [\ ]_1) - \mu\,[s + [\ ]_2)]}{[z_1 - \beta_1[s + [\ ]_1)]\,[s + [\ ]_1]}\right\} \times$$

$$\times [1-\mu(s+[\ ]_2)]^{-1},$$

где

$$d(s, z) = c_{12}(s+[\ ]_1) - c_{12}(s+[\ ]_2+a_1), \quad (3.11)$$

$$\mu(s+[\ ]_2) = [c_{12}(s+[\ ]_2+a_1[1-\bar{\pi}_1(s+[\ ]_2)]) -$$

$$-c_{12}(s+[\ ]_2+a_1)]\,c_{21}(s+[\ ]_2+a_1[1-\bar{\pi}_1(s+[\ ]_2)]),$$

а $\bar{\pi}_1(s+[\ ]_2)$ *определяется из (3.2).*

Доказательство. ◑ Воспользуемся определением промежутка M, введенного при доказательстве леммы 1.4. Покажем, что имеет место равенство

$$sv_2(z, s) = sc_{12}(z, s) +$$

$$+\sum_{n\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-(s+[\ ]_2)t}\frac{(a_1t)^n}{n!}e^{-a_1t}z_1^n\,dC_{12}(t)\,s\cdot c_{21}(z, s) +$$

$$+\sum_{n\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-(s+[\ ]_2)t}\frac{(a_1t)^n}{n!}e^{-a_1t}\,dC_{12}(t)\times$$

$$\times\sum_{m\geqslant 0}\int_0^\infty e^{-(s+[\ ]_2)u}\frac{(a_1u)^m}{m!}e^{-a_1u}\,dC_{21}(u)\times$$

$$\times s\bar{\pi}_1^{(n+m)}(z, s) + \mu(s+[\ ]_2)\,sv_2(z, s). \quad (3.12)$$

В самом деле, для того чтобы первая «катастрофа» произошла на отдельном цикле ориентации в момент, когда в системе нет синих вызовов $\langle sv_2(z, s)\rangle$, необходимо и достаточно, чтобы

либо первая «катастрофа» произошла за промежуток ориентации (1→2) в предположении, что за длительность ориентации не поступило ни одного a_1-вызова в момент, когда в системе нет синих вызовов $\langle sc_{12}(z, s)\rangle$;

либо ориентация (1→2) длилась время t $\langle dC_{21}(t)\rangle$, за это время не произошло «катастрофы» $\langle e^{-st}\rangle$ и не поступило синих a_2-вызовов $\langle e^{-[\ ]_2t}\rangle$, поступило $n\geqslant 1$ a_1-вызовов $\left\langle\frac{(a_1t)^n}{n!}e^{-a_1t}\right\rangle$, являющихся красными $\langle z_1^n\rangle$, и первая «катастро-

фа» произошла на отдельном промежутке ориентации ($2 \to 1$) в момент, когда в системе нет синих вызовов $< sc_{21}(z, s) >$;

либо ориентация ($1 \to 2$) длилась время t $< dC_{12}(t) >$, за это время не произошло «катастрофы» $< e^{-st} >$, не поступили синие a_2-вызовы $< e^{-[\ ]_2 t} >$, поступило $n \geqslant 1$ a_1-вызовов $\left\langle \frac{(a_1 t)^n}{n!} e^{-a_1 t} \right\rangle$, по завершению ориентации ($1 \to 2$) сразу же началась ориентация ($2 \to 1$), которая длилась время u $< dC_{21}(u) >$, за это время не произошло «катастрофы» $< e^{-su} >$, не поступили синие a_2-вызовы $< e^{-[\ ]_2 u} >$, поступило $m \geqslant 0$ a_1-вызовов $\left\langle \frac{(a_1 u)^m}{m!} e^{-a_1 u} \right\rangle$ и первая «катастрофа» произошла на отдельном $\overline{\Pi}_1^{(n+m)}$ -промежутке в момент, когда в системе нет синих вызовов $\langle s \overline{\pi}_1^{(n+m)} (z, s) \rangle$;

либо имел место промежуток M, за него не произошло «катастрофы» и не поступило синих a_2-вызовов $< \mu(s+[\ ]_2) >$, первая «катастрофа» произошла на начавшемся заново цикле ориентации в момент, когда в системе нет синих вызовов $< s\nu_2(z, s) >$.

Обозначим третье слагаемое соотношение (3.12) через Σ_1 и опять воспользуемся выражением (3.4) (при $m = n+m$, $k=1$). Получаем

$$\Sigma_1 = \sum_{n \geqslant 1} \int_0^\infty e^{-(s+[\ ]_2+a_1)t} \frac{(a_1 t)^n}{n!} dC_{12}(t) \times$$

$$\times \frac{s\beta_1(z, s)}{z_1 - \beta_1(s+[\ ]_1)} \int_0^\infty e^{-(s+[\ ]_2+a_1)t} \times$$

$$\times \sum_{m \geqslant 0} \left[z_1^n \frac{(a_1 z_1 t)^m}{m!} - [\overline{\pi}_1(s+[\ ]_2)]^n \times \right.$$

$$\left. \times \frac{[a_1 \pi_1(s+[\ ]_2)t]^m}{m!} \right] dC_{21}(t) =$$

$$= \frac{s\beta_1(z, s)}{z_1 - \beta_1(s+[\ ]_1)} \int_0^\infty e^{-(s+[\ ]_2+a_1)t} \sum_{n \geqslant 1} \left[c_{21}(s+[\ ]_1) \frac{(z_1 a_1 t)}{n!} \right.$$

$$- \frac{[\bar{\pi}_1 (s + [\ ]_2)\, a_1 t]^n}{n!} c_{21} (s + [\ ]_2 +$$

$$+ a_1 [1 - \bar{\pi}_1 (s + [\ ]_2)]) \Big] dC_{12} (t) =$$

$$= \frac{s\, \beta_1 (z, s)}{z_1 - \beta_1 (s + [\ ]_1)} \{[c_{12} (s + [\ ]_1) - c_{12} (s + [\ ]_2 + a_1)] \times$$

$$\times c_{21} (s + [\ ]_1) - [c_{12} (s + [\ ]_2 + a_1 [1 - \bar{\pi}_1 (s + [\ ]_2)]) -$$

$$- c_{12} (s + [\ ]_2 + a_1)]\, c_{21} (s + [\ ]_2 + a_1 [1 - \bar{\pi}_1 (s + [\ ]_2)]\}.$$

Произведя суммирование и интегрирование во втором слагаемом (3.12), подставляя выражение для Σ_1 в (3.12) и используя (1.15), (3.5), обозначения (3.11) и то, что

$$sc_{12} (z, s) = s \frac{1 - c_{12} (s + [\ ]_2)}{s + [\ ]_2},$$

получаем требуемое. ◐

§ 4

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОЧЕРЕДИ НА ОТДЕЛЬНОМ ЦИКЛЕ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Лемма 3.6. *Для схем 1.1, 2.1, 3.1 и 4.1 функция $h_2(z, s)$ определяется из соотношения*

$$h_2 (z, s) = z_2 \frac{[1 + a_1 \pi_1 (z, s) + a_1 \pi_1 (s + [\ ]_2)\, \nu_2 (z, s)] \times}{s + [\ ]_2 + a_1 - a_1 [1 - \beta_2 (s + [\ ]_2 + a_1)] \times} \frac{\times [1 - \beta_2 (s + [\ ]_2 + a_1)]}{\times \pi_1 (s + [\ ]_2)\, \nu_2 (s + [\ ]_2)},$$

где для рассматриваемых схем $\nu_2(s + [\ ]_2)$, $\pi_1(z, s)$ и $\nu_2(z, s)$ определяются из соотношений лемм 1.1—1.4 и лемм 3.1—3.5; $\pi_1(s + [\ ]_2)$ — из (3.6).

Доказательство. ◑ Воспользуемся определением концевого (неконцевого) промежутка обслуживания, введенного при доказательстве леммы 1.5. Докажем соотношение

$$sh_2 (z, s) = z_2 \int_0^\infty [B_2^k (\infty) - B_2^k (t)]\, e^{-[\ ]_2 t} s e^{-st} dt +$$

$$+ z_2 \int_0^\infty [B_2^H(\infty) - B_2^H(t)] e^{-[\ ]_2 t} se^{-st} dt +$$

$$+ z_2 \beta_2^H (s + [\ ]_2) s \pi_1 (z, s) +$$

$$+ z_2 \beta_2^H (s + [\ ]_2) \pi_1 (s + [\ ]_2) s \nu_2 (z, s) +$$

$$+ \beta_2^H (s + [\ ]_2) \pi_1 (s + [\ ]_2) \nu_2 (s + [\ ]_2) sh_2 (z, s).$$

Пусть первая «катастрофа» произошла на отдельном цикле обслуживания в момент, когда в системе нет синих вызовов $<sh_2'(z, s)>$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

либо имел место концевой промежуток обслуживания и первая «катастрофа» произошла на нем в момент, когда он еще не закончился $\langle [B_2^k(\infty) - B_2^k(t)] se^{-st} dt \rangle$, до момента катастрофы» не поступило синих a_2-вызовов $\langle e^{-[\ ]_2 t} \rangle$, присутствовавший вызов на приборе — красный $<z_2>$;

либо имел место неконцевой промежуток обслуживания, первая «катастрофа» произошла на нем в момент, когда он еще не закончился $\langle [B_2^H(\infty) - B_2^H(t)] se^{-st} dt \rangle$, до момента «катастрофы» не поступило синих a_2-вызовов $\langle e^{-[\ ]_2 t} \rangle$, присутствовавший вызов на приборе — красный $<z_2>$;

либо за длительность неконцевого промежутка обслуживания не произошло «катастрофы» и не поступило синих a_2-вызовов $<\beta_2^H(s+[\ ]_2)>$, вызов, которым начался неконцевой промежуток обслуживания — красный $<z_2>$, и первая «катастрофа» произошла на отдельном Π_1-периоде в момент, когда в системе нет синих вызовов $<s\pi_1(z, s)>$;

либо за длительность неконцевого промежутка обслуживания не произошло «катастрофы» и не поступило синих a_2-вызовов $\langle \beta_2^H(s + [\ ]_2) \rangle$, не произошло «катастрофы» и не поступило синих a_2-вызовов за следовавший затем Π_1-период $<\pi_1(s+ +[\ ]_2)>$, вызов, которым начался неконцевой промежуток обслуживания, является красным $<z_2>$, и первая «катастрофа» произошла на отдельном цикле ориентации в момент, когда в системе нет синих вызовов $<s\nu_2(z, s)>$;

либо «катастрофы» и синих a_2-вызовов не было ни за длительность неконцевого промежутка обслуживания $\langle \beta_2^H(s+[\ ]_2)\rangle$, ни за длительность Π_1-периода $<\pi_1(s+[\,]_2)>$, ни за длительность цикла ориентации $<\nu_2(s+[\ ]_2)>$; вызов, которым начался неконцевой промежуток обслуживания, был красным $<z_2>$, первая «катастрофа» произошла на начавшемся заново цикле обслуживания в момент, когда в системе нет синих вызовов $<sh_2(z, s)>$.

Из доказанного равенства, учитывая (1.16) и (1.17), получаем утверждение леммы. ◐

Лемма 3.7. *Для схем 1.2, 2.2, 3.2 и 4.2* $h_2(z,s)$ *равно*

$$h_2(z, s) = z_2 \cdot \frac{1-\beta_2(s+[\ ]_2+a_1)}{s+[\ ]_2+a_1}[1+a_1\pi_1(z, s)+ + a_1\pi_1(s+[\ ]_2)\nu_2(z, s)],$$

где для рассматриваемых схем $\pi_1(z, s)$ *и* $\nu_2(z, s)$ *определяются из соотношений лемм 3.1—3.5;* $\pi_1(s+[\ ]_2)$ *из (3.6).*

Доказательство следует из выражения

$$sh_2(z, s) = z_2\int_0^\infty [B_2^k(\infty) - B_2^k(t)]\,e^{-[\ ]_2 t}se^{-st}\,dt + + z_2\int_0^\infty [B_2^H(\infty) - B_2^H(t)]\,e^{-[\ ]_2 t}se^{-st}\,dt + + z_2\beta_2^H(s+[\ ]_2)\,s\pi_1(z, s) + + z_2\beta_2^H(s+[\ ]_2)\,\pi_1(s+[\ ]_2)\,s\nu_2(z, s),$$

которое проверяется совершенно так же, как и в доказательстве леммы 3.6.

Лемма 3.8. *Для схем 1.3, 2.3, 3.3 и 4.3 функция* $h_2(z, s)$ *равна*

$$h_2(z, s) = z_2\frac{1-\beta_2(s+[\ ]_2+a_1[1-\delta(s+[\ ]_2)])}{s+[\ ]_2+a_1[1-\delta(s+[\ ]_2)]}\times \times[1+a_1\pi_1(z, s)+a_1\pi_1(s+[\ ]_2)\nu_2(z, s)],$$

где

$$\delta(s+[\ ]_2) = c_{21}(s+[\ ]_2+$$

$$+a_1[1-\bar{\pi}_1(s+[\ ]_2)])\,\bar{\pi}_1(s+[\ ]_2)\,\nu_2(s+[\ ]_2);$$

$\nu_2(s+[\ ]_2)$, $\pi_1(z, s)$ *и* $\nu_2(z, s)$ *определяются из соотношений лемм 1.1—1.4 и лемм 3.1—3.5;* $\pi_1(s+ +[\ ]_2)$ *и* $\pi_1(s+[\ ]_2)$ *— из (3.2) и (3.6).*

Доказательство. ◑ Воспользуемся определением D-промежутка, введенного при доказательстве леммы 1.7. Прерывающий вызов назовем «$_*\Pi_1 N_2$-хорошим», если за D-промежуток не произойдет «катастрофы» и не поступят синие a_2-вызовы. Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, прерывающий вызов назовем «$_*\Pi_1 N_2$-плохим». Понятно, что вероятность того, что прерывающий вызов является «$_*\Pi_1 N_2$-хорошим» («$_*\Pi_1 N_2$-плохим») есть $\delta(s+[\ ]_2)$ $(1-\delta(s+[\ ]_2))$. Ясно также, что

$$\delta(s+[\ ]_2) = c_{21}(s+[\ ]_2+$$

$$+a_1[1-\bar{\pi}_1(s+[\ ]_2)])\,\bar{\pi}_1(s+[\ ]_2)\,\nu(s+[\ ]_2)$$

и что поток «$_*\Pi_1 N_2$-плохих» вызовов пуассоновский с параметром $a_1\{1-\delta_1(s+[\ ]_2)\}$.

Имеет место основное соотношение

$$sh_2(z, s) = z_2\int_0^\infty [1-B_2(x)]e^{-[\ ]_2 x}e^{-a_1[1-\delta(s+[\ ]_2)]x}se^{-sx}dx+$$

$$+z\int_0^\infty e^{-sx}[1-B_2(x)]e^{-[\ ]_2 x}e^{-a_1[1-\delta(s+[\ ]_2)]x}a_1\,dx s\delta(z, s)$$

доказательство которого проверяется аналогично соотношению (3.9). Вероятность $s\delta(z, s)$ находится при учете строения промежутка D. Можно убедиться, что $s\delta(z, s) = s\pi_1(z, s)+\pi_1(s+[\ ]_2)s\nu_2(z, s)$. Подставим $s\delta(z, s)$ в выражение для $sh_2(z, s)$ и получим требуемое соотношение. ◐

Лемма 3.9. *Для схем 1.4, 2.4, 3.4 и 4.4* $h_2(z, s)$ *равно*

$$h_2(z, s) = z_2[1+a_1\pi_1(z, s)+a_1\pi_1(s+[\ ]_2)\nu_2(z, s)]\times$$

$$\times\int_0^\infty \frac{\{1-e^{-(s+[\ ]_2+a_1)u}\}\,dB_2(u)}{s+[\ ]_2+a_1-a_1\pi_1'(s+[\ ]_2)\nu_2(s+[\ ]_2)[1-e^{-(s+[\ ]_2+a_1)u}]}$$

где $\nu_2(s+[\ ]_2)$, $\pi_1(z,s)$ *и* $\nu_2(z,s)$ *определяются из соотношений лемм 1.1—1.4 и лемм 3.1—3.5*; $\pi_1(s+$ $+[\ ]_2)$ — *из* (3.6).

Доказательство. ◑ При условии, что длительность обслуживания a_2-вызова есть фиксированная величина, как и при доказательстве лемм 3.6 и 3.4, получаем

$$h_2(z,s)=z_2\left\{\frac{1-\beta_2^k(s+[\ ]_2;u)-\beta_2^H(s+[\ ]_2;u)}{s+[\ ]_2}+\right.$$

$$+\beta_2^H(s+[\ ]_2;u)\,\pi_1(z,s)+$$

$$\left.+\beta_2^H(s+[\ ]_2;u)\,\pi_1(s+[\ ]_2)\,\nu_2(z,s)\right\}\times$$

$$\times[1-\beta_2^H(s+[\ ]_2;u)\,\pi_1(s+[\ ]_2)\,\nu_2(s+[\ ]_2)]^{-1}.$$

Осталось проинтегрировать по мере $dB_2(u)$ и воспользоваться соотношением (2.22) и (2.23) при $s=s+[\ ]_2$. ◐

§ 5
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОЧЕРЕДИ ДЛЯ СИСТЕМ С РЕЖИМОМ ОРИЕНТАЦИИ «СБРОС В НУЛЬ»

Теорема 3.1. *Для схем 1.1—4.4 режима «сброс в нуль» преобразование Лапласа производящей функции совместного распределения числа вызовов каждого приоритета, находящихся в системе в любой момент времени, задается соотношением*

$$p(z,s)=\frac{1+\sigma\pi(z,s)}{s+\sigma-\sigma\pi(s)},\qquad(3.13)$$

где

$$\sigma\pi(z,s)=a_1\pi_1(z,s)+\nu_2(z,s)\,\gamma(s,z)+\frac{h_1(z,s)}{z_2-h_2(s+[\ ]_2)}\times$$

$$\times\{\gamma(s,z)\,\nu_2(s+[\ ]_2)+a_1\pi_1(s+a_2)-\sigma\pi(s)\},\qquad(3.14)$$

$$\gamma(s,z)=a_1[\pi_1(s+[\ ]_2)-\pi_1(s+a_2)]+a_2z_2;\qquad(3.15)$$

$v_2(s+[\ ]_2)$, $h_2(s+[\ ]_2)$, $\pi_1(z, s)$, $v_2(z, s)$ и $h_2(z, s)$ задаются соотношениями лемм 1.1—1.8 и 3.1—3.9, соответственно для каждой из схем; $\pi(s)$, $\pi_1(s+a_2)$ и $\pi_1(s+[\ ]_2)$ — соотношениями теоремы 1.1.

Доказательство. ◑ Соотношение (3.13) получено в [7]. Заметим, что приведенное там доказательство не затрагивает структуру отдельного периода занятости, поэтому это соотношение остается справедливым и в данном случае. Для доказательства (3.14) установим сначала справедливость соотношения

$$s\pi(z, s) = \frac{a_1}{\sigma} s\pi_1(z, s) +$$

$$+\frac{a_1}{\sigma}\sum_{n\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}z_2^n\, d\Pi_1(t)s\, v_2(z, s) +$$

$$+\frac{a_1}{\sigma}\sum_{n\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}d\Pi_1(t)\times$$

$$\times\sum_{m\geqslant 0}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^m}{m!}e^{-a_2t}dN_2(t)\, s\,\bar{\pi}_2^{(n+m)}(z, s) +$$

$$+\frac{a_2}{\sigma}z_2 s\, v_2(z, s) +$$

$$+\frac{a_2}{\sigma}\sum_{n\geqslant 0}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}dN_2(t)\, s\,\bar{\pi}_2^{(n+1)}(z, s). \quad (3.16)$$

Пусть первая «катастрофа» произошла на отдельном периоде занятости в момент, когда в системе нет синих вызовов $<s\pi(z, s)>$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

либо с вероятностью a_1/σ период занятости являлся Π_1-периодом и первая «катастрофа» произошла на нем в момент, когда в системе нет синих вызовов $<s\pi_1'(z, s)>$;

либо с вероятностью a_1/σ период занятости являлся Π_1-период, за его длительность $<d\Pi_1(t)>$ не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, поступило

$n \geqslant 1$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2t)^n}{n!} e^{-a_2t} \right\rangle$, все они красные $\langle z_2^n \rangle$ и первая «катастрофа» произошла на последовавшем затем отдельном цикле ориентации в момент, когда в системе нет синих вызовов $< s\nu_2(z, s) >$;

либо с вероятностью a_1/σ период занятости являлся Π_1-периодом, за его длительность $< d\Pi_1(t) >$ не произошло «катастрофы» $< e^{-st} >$, поступило $n \geqslant 1$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2t)^n}{n!} e^{-a_2t} \right\rangle$, за последовавший затем цикл ориентации, который закончился через время t $< dN_2(t) >$, также не произошло «катастрофы», поступило $m \geqslant 0$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2t)}{m!} e^{-a_2t} \right\rangle$ и первая «катастрофа» произошла на отдельном $\overline{\Pi}_2^{(n+m)}$ -периоде в момент, когда в системе нет синих вызовов $\langle s\overline{\pi}_2^{(n+m)}(z, s) \rangle$;

либо период занятости открылся красным a_2-вызовом $\left\langle z_2 \frac{a_2}{\sigma} \right\rangle$ и первая «катастрофа» произошла на отдельном цикле ориентации в момент, когда в системе нет синих вызовов $< s\nu_2(z, s) >$;

либо период занятости открылся a_2-вызовом $\langle a_2/\sigma \rangle$, за длительность следовавшего затем цикла ориентации $< dN_2(t) >$ не произошло «катастрофы» $< e^{-st} >$, поступило $n \geqslant 0$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2t)^n}{n!} e^{-a_2t} \right\rangle$ и первая «катастрофа» произошла на отдельном $\overline{\Pi}_2^{(n+1)}$ -периоде в момент, когда в системе нет синих вызовов $\langle s\overline{\pi}_2^{(n+1)}(z, s) \rangle$.

Обозначим третье и пятое слагаемые (3.16) через Σ и Σ_1 и применим соотношение (3.4) (при $m = n+1$, $m+n$; $k = 2$).

Окончательно получаем

$$\Sigma = \frac{a_1 sh_2(z, s)}{\sigma [z_2 - h_2(s + [\ ]_2)]} \{[\pi_1(s + [\ ]_2) - \pi_1(s + a_2)] \times$$

$$\times \nu_2(s + [\ ]_2) - [\pi_1(s + a_2[1 - \overline{\pi}_2(s)]) -$$

$$- \pi_1(s + a_2)] \nu_2(s + a_2[1 - \overline{\pi}_2(s)])\};$$

$$\Sigma_1 = \frac{a_2 s h_2(z, s)}{\sigma [z_2 - h_2(s + [\ ]_2)]} \{z_2 [\nu_2(s + [\ ]_2) -$$

$$- \bar{\pi}_2(s)\, \nu_2(s + a_2)\, [1 - \bar{\pi}_2(s)]]\}.$$

Подставляя полученные выражения в выражени для $s\pi(z, s)$ и введя обозначения (3.15), после не которых преобразований получаем второе соотно шение теоремы. ◐

§ 6

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОЧЕРЕДИ НА ОТДЕЛЬНОМ Φ_1-ПЕРИОДЕ

При получении длины очереди для систе «смотри вперед» и «жди наивероятного» понадо бится, кроме того, $\varphi_k(z, s)$—преобразование Лапла са производящей функции совместного распреде ния длины очереди в любой момент времени от дельного Φ_k-периода ($k=1,2$). $\varphi_2(z, s)$ будет по лучено в § 8. Получим $\varphi_1(z, s)$.

Лемма 3.10. *Для схем 1.1—4.4*

$$\varphi_1(z, s) = \left\{ \frac{1 - c_{21}(s + [\ ]_1)}{s + [\ ]_1} + \frac{z_1 [1 - \beta_1(s + [\ ]_1)]\, \psi(s, z)}{[s + [\ ]_1]\, [z_1 - \beta_1(s + [\ ]_1)]} \right.$$

$$+ \frac{h_2(z, s)}{z_2 - h_2(s + [\ ]_2)} [\varkappa(s, z)\, \nu_2(s + [\ ]_2) - \bar{g}_2(s)] +$$

$$\left. + \varkappa(s, z)\, \nu_2(z, s)\, \nu_2(z, s) \right\} [1 - g_2(s)]^{-1},$$

где

$$\varkappa(s, z) = c_{21}(s + [\ ]_2 + a_1 [1 - \bar{\pi}_1(s + [\ ]_2)]) -$$

$$- c_{21}(s + a_2 + a_1 [1 - \bar{\pi}_1(s + a_2)]), \qquad (3.17)$$

$$\psi(s, z) = c_{12}(s + [\ ]_1) - c_{12}(s + [\ ]_2 +$$

$$+ a_1 [1 - \bar{\pi}_1(s + [\ ]_2)]); \qquad (3.18)$$

$\nu_2(s + [\ ]_2)$, $h_2(s + [\ ]_2)$, $\nu_2(z, s)$ и $h_2(z, s)$ задаю ся соотношениями лемм 1.1—1.8 и 3.2—3.9 соотве ственно для каждой из схем; $g_2(s)$ — соотношени ем (1.39); $\pi_1(s + [\ ]_2)$ определяется из (3.2).

Доказательство. ◑ Покажем, прежде всего, что выполняется соотношение

$$s\varphi_1(z, s) = \int_0^\infty [1 - C_{21}(t)]\, e^{-[\ ]_1 t}\, e^{-st} s\, dt +$$

$$+ \sum_{n\geqslant 1} s\bar{\pi}_1^{(n)}(z, s) \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_1 t)^n}{n!} e^{-a_1 t} e^{-[\ ]_2 t}\, dC_{21}(t) +$$

$$+ \sum_{n\geqslant 1} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t} z_2^n\, d\hat{\Pi}(t)\, s\, \nu_2^-(z, s) +$$

$$+ \sum_{n\geqslant 1} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t}\, d\hat{\Pi}(t) \times$$

$$\times \sum_{k\geqslant 0} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^k}{k!} e^{-a_2 t}\, dN_2(t)\, s\, \bar{\pi}_2^{(n+k)}(z, s) +$$

$$+ \sum_{n\geqslant 1} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t}\, d\hat{\Pi}(t) \times$$

$$\times \sum_{k\geqslant 0} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^k}{k!} e^{-a_2 t}\, dN_2(t)\, [\bar{\pi}_2(s)]^{n+k} s\, \varphi_1(z, s) +$$

$$+ \sum_{n\geqslant 1} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t} e^{-a_1 t} z_2^n\, dC_{21}(t)\, s\, \nu_2(z, s) +$$

$$+ \sum_{n\geqslant 1} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t} e^{-a_1 t}\, dC_{21}(t) \times$$

$$\times \sum_{k\geqslant 0} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^k}{k!} e^{-a_2 t}\, dN_2(t)\, s\, \bar{\pi}_2^{(n+k)}(z, s) +$$

$$+ \sum_{n\geqslant 1} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t} e^{-a_1 t}\, dC_{21}(t) \times$$

$$\times \sum_{k\geqslant 0} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^k}{k!} e^{-a_2 t}\, dN_2(t)\, [\bar{\pi}_2(s)]^{n+k} s\, \varphi_1(z, s). \tag{3.19}$$

Действительно, левая часть есть вероятност того, что первая «катастрофа» произошла на о дельном Φ_1-периоде в момент, когда в системе не синих вызовов. Для этого необходимо и достаточ но, чтобы

либо первая «катастрофа» произошла, когд ориентация $(2\to 1)^\circ$ еще не закончена $<[1-C_{21}(t)]e^{-st}sdt>$ и до момента «катастрофы» н было синих a_1- и a_2-вызовов $\langle e^{-[\ ]_1 t}\rangle$;

либо за длительность ориентации $(2\to 1)^\circ$ н произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, поступило $n\geqslant$ a_1-вызовов $\left\langle \frac{(a_1t)^n}{n!}e^{-a_1t}\right\rangle$, не было синих a_2-вызово $\langle e^{-[\ ]_2 t}\rangle$ и первая «катастрофа» произошла на о дельном $\overline{\Pi}_1^{(n)}$-периоде в момент, когда в систем нет синих вызовов $\langle s\overline{\pi}_1^{(n)}(z, s)\rangle$;

либо $\widehat{\Pi}$-период (определение $\widehat{\Pi}$-периода см. доказательстве леммы 1.9) длился время $<d\widehat{\Pi}(t)>$, за это время не произошло «катастр фы» $<e^{-st}>$, поступило $n\geqslant 1$ красных a_2-вызово $\left\langle z_2\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\right\rangle$ и первая «катастрофа» произош на отдельном цикле ориентации в момент, когда системе нет синих вызовов $<s\nu_2(z, s)>$;

либо $\widehat{\Pi}$-период длился время t $<d\widehat{\Pi}(t)>$, это время не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$ поступило $n\geqslant 1$ a_2-вызовов $\left\langle\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\right\rangle$, за дл тельность цикла ориентации не произошло «ка строфы» $<e^{-st}>$ поступило $k\geqslant 0$ a_2-вызов $\left\langle\frac{(a_2t)^k}{k!}e^{-a_2t}\right\rangle$ и первая «катастрофа» произош на отдельном $\overline{\Pi}_2^{(n+k)}$-периоде в момент, когда системе нет синих вызовов $\langle s\overline{\pi}_2^{(n+k)}(z, s)\rangle$;

либо $\widehat{\Pi}$-период длился время t $<d\widehat{\Pi}(t)>$, за эт время не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, пост пило $n\geqslant 1$ a_2-вызовов $\left\langle\frac{(a_2t)^k}{k!}e^{-a_2t}\right\rangle$, за длител ность цикла ориентации не произошло «катастро фы» $<e^{-st}>$, поступило $k\geqslant 0$ a_2-вызово

$\left\langle \frac{(a_2 t)^k}{k!} e^{-a_2 t} \right\rangle$, за длительность $\overline{\Pi}_2^{(n+k)}$-периода не произошло «катастрофы» $<[\overline{\pi}_2(s)]^{n+k}>$ и первая «катастрофа» произошла на отдельном Φ_1-периоде в момент, когда в системе нет синих вызовов $<s\varphi_1(z, s)>$;

либо ориентация $(2 \to 1)^\circ$ длилась время t $<dC_{12}(t)>$, за это время не произошло «катастрофы» и не поступило a_1-вызовов $<e^{-(s+a_1)t}>$, поступило $n \geqslant 1$ красных a_2-вызовов $\left\langle z_2 \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t} \right\rangle$ и первая «катастрофа» произошла на отдельном цикле ориентации в момент, когда в системе нет синих вызовов $<s\nu_2(z, s)>$;

либо ориентация $(2 \to 1)^\circ$ длилась время t $<dC_{21}(t)>$, за это время не произошло «катастрофы» и не поступило a_1-вызовов $<e^{-(s+a_1)t}>$, поступило $n \geqslant 1$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t} \right\rangle$, за длительность цикла ориентации не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, поступило $k \geqslant 0$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2 t)^k}{k!} e^{-a_2 t} \right\rangle$ и первая «катастрофа» произошла на отдельном $\overline{\Pi}_2^{(n+k)}$-периоде в момент, когда в системе нет синих вызовов $\langle s\overline{\pi}_2^{(n+k)}(z, s)\rangle$;

либо ориентация $(2 \to 1)^\circ$ длилась время t $<dC_{21}(t)>$, за это время не произошло «катастрофы» и не поступило a_1-вызовов $<e^{-(s+a_1)t}>$, поступило $n \geqslant 1$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t} \right\rangle$, за длительность цикла ориентации не произошло «катастрофы» и поступило $k \geqslant 0$ a_2-вызовов $\left\langle e^{-st} \frac{(a_2 t)^k}{k!} e^{-a_2 t} \right\rangle$, за длительность $\overline{\Pi}_2^{(n+k)}$-периода не произошло «катастрофы» $<[\overline{\pi}_2(s)]^{n+k}>$ и первая «катастрофа» произошла на отдельном Φ_1-периоде в момент, когда в системе нет синих вызовов $<s\varphi_1(z, s)>$.

Из (3.4) находим $s\pi_1^{(n)}(z, s)$ и $s\overline{\pi}_2^{(n+k)}(z, s)$, подставляем их в (3.19), производим суммирование и интегрирование, после чего, воспользовавшись обозначениями (3.17), (3.18) и выражением для $g_2(s)$, получаем соотношение леммы. ◐

4 Зак. 142

§ 7
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОЧЕРЕДИ ДЛЯ СИСТЕМ С РЕЖИМОМ ОРИЕНТАЦИИ «СМОТРИ ВПЕРЕД»

Преобразование Лапласа производящей функции совместного распределения числа вызовов каждого приоритета, находящихся в системе в любой момент времени, задается следующей теоремой.

Теорема 3.2. *Для схем 1.1—4.4 режим «смотри вперёд»*

$$p(z, s) = \frac{(1 + \sigma\pi(z, s))}{(s + \sigma - \sigma\pi(s))},$$

где

$$\sigma\pi(z, s) = a_1\bar{\pi}_1(z, s) + \nu_2(z, s)\bar{\gamma}(s, z) + v(s)\varphi_1(z, s) + \frac{h_2}{z_2 - h_2(s + [\ ]_2)}\{\bar{\gamma}(s, z)\nu_2(s + [\ ]_2) - v(s)\},$$

$$\bar{\gamma}(s, z) = a_1[\bar{\pi}_1(s + [\ ]_2) - \bar{\pi}_1(s + a_2)] + a_2 z_2, \quad (3.20)$$

$$v(s) = a_1\{\bar{\pi}_1(a_2[1 - \bar{\pi}_2(s)] + s) - \bar{\pi}_1(s + a_2)\}\nu_2(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2(s)]) + a_2\nu_2(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2(s)]\bar{\pi}_2(s), \quad (3.21)$$

$$\bar{\pi}_1(z, s) = z_1\frac{1 - \beta_1(s + [\ ]_1)}{s + [\ ]_1}\,\frac{z_1 - \bar{\pi}_1(s + [\ ]_2)}{z_1 - \beta_1(s + [\ ]_1)}; \quad (3.22)$$

$\nu_2(s + [\ ]_2)$, $\nu_2(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2(s)])$ *и* $h_2(s + [\ ]_2)$ *для каждой из схем определяется из соотношений лемм 1.1—1.8;* $\nu_2(z, s)$, $h_2(z, s)$ *и* $\varphi_1(z, s)$ *— из соотношений лемм 3.2—3.10;* $\pi(s)$, $\bar{\pi}_2(s)$ *и* $\bar{\pi}_1(\lambda)$ ($\lambda = s + a_2$, $s + [\ ]_2$, $s + a_2 - a_2\bar{\pi}_2(s)$) *— из соотношений теоремы 1.2.*

Доказательство. ◑ Имеет место основное соотношение

$$s\pi(z, s) = \frac{a_1}{\sigma}s\bar{\pi}_1(z, s) + \frac{a_1}{\sigma}\sum_{n\geq 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2 t)^n}{n!}e^{-a_2 t}z_2^n d\bar{\Pi}_1(t)\,s\nu_2(z, s) +$$

$$+\frac{a_1}{\sigma}\sum_{n\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,d\overline{\Pi}_1(t)\times$$

$$\times\sum_{k\geqslant 0}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^k}{k!}e^{-a_2t}\,dN_2(t)\,s\overline{\pi}_2^{(n+k)}(z, s)+$$

$$+\frac{a_1}{\sigma}\sum_{n\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,d\overline{\Pi}_1(t)\times$$

$$\times\sum_{k\geqslant 0}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^k}{k!}e^{-a_2t}\,dN_2(t)\,[\overline{\pi}_2(s)]^{n+k}\,s\varphi_1(z, s)+$$

$$+\frac{a_2}{\sigma}z_2 s\nu_2(z, s)+\frac{a_2}{\sigma}\sum_{n\geqslant 0}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,dN_2(t)\times$$

$$\times s\overline{\pi}_2^{(n+1)}(z, s)+\frac{a_2}{\sigma}\sum_{n\geqslant 0}[\overline{\pi}_2(s)]^{n+1}\times$$

$$\times\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,dN_2(t)\,s\varphi_1(z, s),$$

справедливость которого подтверждается следующими рассуждениями. Пусть первая «катастрофа» произошла на отдельном периоде занятости, когда в системе нет синих вызовов $<s\pi(z, s)>$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

либо с вероятностью a_1/σ период занятости — $\overline{\Pi}_1$-период и первая «катастрофа» произошла на нем в момент, когда в системе нет синих вызовов $<s\overline{\pi}_1(z, s)>$;

либо с вероятностью a_1/σ период занятости — $\overline{\Pi}_1$-период, за время его осуществления $<d\overline{\Pi}_1(t)>$ не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, поступило $n\geqslant 1$ красных a_2-вызовов $\left\langle z_2\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\right\rangle$ и первая «катастрофа» произошла на отдельном цикле ориентации в момент, когда в системе нет синих вызовов $<s\nu_2(z, s)>$;

либо с вероятностью $<a_1/\sigma>$ период занятости — $\overline{\Pi}_1$-период, за время его осуществления $<d\overline{\Pi}_1(t)>$ не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$ поступило $n \geqslant 0$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2t)^n}{n!} e^{-a_2t} \right\rangle$, за длительность цикла ориентации $<dN_2(t)>$ не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, поступило $k \geqslant 0$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2t)^k}{k!} e^{-a_2t} \right\rangle$ и первая «катастрофа» произошла на отдельном $\overline{\Pi}_2^{(n+k)}$ -периоде в момент, когда в системе нет синих вызовов $\langle s\bar{\pi}_2^{(n+k)}(z, s) \rangle$;

либо с вероятностью a_1/σ период занятости — $\overline{\Pi}_1$-период, за время его осуществления $<d\overline{\Pi}_1(t)>$ не произошло «катастрофы», поступило $n \geqslant 1$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2t)^n}{n!} e^{-a_2t} \right\rangle$, за длительность цикла ориентации $<dN_2(t)>$ не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, поступило $k \geqslant 0$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2t)^k}{k!} e^{-a_2t} \right\rangle$ за $\overline{\Pi}_2^{(n+k)}$ -период не произошло «катастрофы» $<\bar{\pi}_2(s)]^{n+k}>$ и первая «катастрофа» произошла на отдельном Φ_1-периоде в момент, когда в системе нет синих вызовов $<s\varphi_1(z, s)>$;

либо с вероятностью a_2/σ период занятости открывается красным $<z_2>$ a_2-вызовом и первая «катастрофа» произошла на отдельном цикле ориентации в момент, когда в системе нет синих вызовов $<s\nu_2(z, s)>$;

либо с вероятностью a_2/σ период занятости открывается a_2-вызовом, за длительность цикла ориентации $<dN_2(\mathrm{t})>$ не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, поступило $n \geqslant 0$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2t)^n}{n!} e^{-a_2t} \right\rangle$ и первая «катастрофа» произошла на отдельном $\overline{\Pi}_2^{(n+1)}$ -периоде в момент, когда в системе нет синих вызовов $<s\bar{\pi}^{n+1}(z, s)>$;

либо с вероятностью a_2/σ период занятости открывается a_2-вызовом, за длительность цикла ориентации $<dN_2(\mathrm{t})>$ не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, поступило $n \geqslant 0$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2t)^n}{n!} e^{-a_2t} \right\rangle$ за последовавший затем $\overline{\Pi}_2^{(n+1)}$ -период не произо-

шло «катастрофы» $<[\bar{\pi}_2(s)]^{n+1}>$ и первая «катастрофа» произошла на отдельном Φ_1-периоде в момент, когда в системе нет синих вызовов $<s\varphi_1(z, s)>$.

Как и выше, воспользовавшись (3.4), произведя суммирование, интегрирование, затем с учетом обозначений (3.20) и (3.21), получаем второе соотношение теоремы. Первое соотношение не отличается от соотношения (3.13) теоремы 3.1. Соотношение (3.22) получается из (3.4) при $m=1$. ◐

§ 8
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОЧЕРЕДИ ДЛЯ СИСТЕМ С РЕЖИМОМ ОРИЕНТАЦИИ «ЖДИ НАИВЕРОЯТНОГО»

Лемма 3.11. *Для схем 1.1—4.4*

$$\varphi_2(z, s) = \frac{h_2(z, s)}{z_2 - h_2(s + [\ ]_2)} [\nu_2(s + [\ ]_2) -$$

$$- \nu_2(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2(s)])] + \nu_2(z, s), \qquad (3.23)$$

где $\nu_2(s+[\ ]_2)$, $\nu_2(s+a_2[1-\bar{\pi}_2(s)])$, $h_2(s+[\ ]_2)$, $\nu_2(z, s)$ *и* $h_2(z, s)$ *задаются соотношениями лемм 1.1—1.8 и 3.2—3.9 соответственно для каждой из схем.*

Доказательство следует из соотношения

$$s\varphi_2(z, s) = s\nu_2(z, s) +$$

$$+ \sum_{n\geq 1} \bar{\pi}_2^{(n)}(z, s) \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t}\, dN_2(t),$$

которое представляет собой различную запись того, что первая «катастрофа» произошла на отдельном Φ_2-периоде в момент, когда в системе нет синих вызовов и которая подтверждается аналогичными, что и всюду выше, рассуждениями. Для получения (3.23) следует лишь воспользоваться (3.4), просуммировать и проинтегрировать.

Теорема 3.3. *Для схем 1.1—4.4 режима «жди наивероятного»*

$$p(z, s) =$$

$$= \begin{cases} [1 + \sigma\pi^{[1]}(z, s)][s + \sigma - \sigma\pi^{[1]}(s)]^{-1} & \text{при } a_1 \geqslant a_2, \\ [1 + \sigma\pi^{[2]}(z, s)][s + \sigma - \sigma\pi^{[2]}(s)]^{-1} & \text{при } a_1 < a_2, \end{cases} \quad (3.24)$$

где

$$\sigma\pi^{[1]}(z, s) = a_1\bar{\pi}_1(z, s) + \nu_2(z, s)\bar{\gamma}(z, s) + v(s)\varphi_1(z, s) + $$
$$+ \frac{h_2(z, s)}{z_2 - h_2(s + [\ ]_2)}\{\bar{\gamma}(s, z)\nu_2(s + [\ ]_2) - v(s)\},$$

$$\sigma\pi^{[2]}(z, s) = a_1\pi_1(z, s) + a_1\pi_1(s +$$
$$+ a_2)\varphi_2(z, s) + \omega(s, z)\nu_2(z, s) + \quad (3.25)$$
$$+ \frac{h_2(z, s)}{z_2 - h_2(s + [\ ]_2)}\{\omega(s, z)\nu_2(s + [\ ]_2) -$$
$$- \sigma\pi^{[2]}(s) - a_1\pi_1(s + a_2)\varphi_2(s) - a_2z_2\},$$

$$\sigma\pi^{[1]}(s) = a_1\bar{\pi}_1(s + a_2) + v(s)\varphi_1(s),$$

$$\sigma\pi^{[2]}(s) = a_1\pi_1(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2(s)])\varphi_2(s) + a_2\bar{\pi}(s), \quad (3.26)$$

$$\omega(s, z) = a_1[\pi_1(s + [\ ]_2) - \pi_1(s + a_2)]; \quad (3.27)$$

$\nu_2(s+[\ ]_2)$, $h_2(s+[\ ]_2)$, $\varphi_1(s)$ *и* $\varphi_2(s)$ *для каждой из схем определяются из соотношений лемм 1.1—1.10;* $\pi_1(z, s)$, $\nu_2(z, s)$, $h_2(z, s)$ *и* $\varphi_2(z, s)$ *— из соотношений лемм 3.1—3.9 и 3.11;* $\bar{\gamma}(s, z)$, $v(s)$ *и* $\bar{\pi}_1(\lambda)$ *задаются соотношениями (3.20)—(3.22);* $\pi_1(\lambda)$ $(\lambda = s + a_2,\ s + [\ ]_2,\ s + a_2 - a_2\bar{\pi}_2(s))$ *определяется из соответствующего соотношения теоремы 1.3;* $\pi^{[1]}(s)$ *и* $\pi^{[2]}(s)$ *есть* $\pi(s)$ *теоремы 1.3 при* $a_1 \geqslant a_2$ *и* $a_1 < a_2$ *соответственно.*

Доказательство. ◑ При $a_1 \geqslant a_2$, как уже отмечено, режим «жди наивероятного» есть «смотри вперед», следовательно, все соотношения с индексом «[1]» доказаны при доказательстве теоремы 3.2. В силу замечания, сделанного в начале доказательства теоремы 3.1, второе соотношение (из фигурных скобок) (3.24) также справедливо. Осталось доказать (3.26). Оно следует из выражения

$$s\pi^{[2]}(z, s) = \frac{a_2}{\sigma} s\bar{\pi}_2(z, s) +$$

$$+ \frac{a_1}{\sigma} s\pi_1(z, s) + \frac{a_1}{\sigma} \pi_1(s + a_2) s\varphi_2(z, s) +$$

$$+ \frac{a_1}{\sigma} \sum \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2t)^n}{n!} e^{-a_2t} z_2^n d\Pi_1(t) s\nu_2(z, s) +$$

$$+ \frac{a_1}{\sigma} \sum \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2t)^n}{n!} e^{-a_2t} d\Pi_1(t) \times$$

$$\times \sum \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2t)^m}{m!} e^{-a_2t} dN_2(t) s\bar{\pi}_2^{(n+m)}(z, s), \quad (3.28)$$

справедливость которого подтверждается такими же рассуждениями, что приводились при доказательстве теорем 3.1 и 3.2. Используя тот же прием: подставляя в (3.28) значения (3.4) (при $m=1$, $n+m$, $k=2$), произведя суммирование, затем интегрирование и используя обозначения (3.27), получаем (3.26). ◐

Следствие. Можно показать, что при выполнении условий $a_1\beta_{11}<1$ и $a_2h_{21}<1$ существует $\lim_{t\to\infty} P(z,t) = P(z)$ и $P(z) = \lim_{s\downarrow 0} sp(z,s)$. Производящая функция $P(z)$ распределения длины очереди в стационарном режиме равна

$$P(z) = (1 + \sigma\psi(z))/(1 + \sigma\pi_1),$$

где

а) для режима «сброс в нуль»

$$\psi(z) = a_1\pi_1(z, 0) + \nu_2(z, 0)\gamma(0, z) + \frac{h_2(z, 0)}{z_2 - h_2([\ ]_2)} \times$$

$$\times [\gamma(0, z)\nu_2([\ ]_2) + a_1\pi_1(a_2) - \sigma];$$

б) для режима «смотри вперед»

$$\psi(z) = \psi_\delta(z) = a_1\bar{\pi}_1(z, 0) + \nu_2(z, 0)\bar{\gamma}(0, z) +$$

$$+ [\sigma - a_1\bar{\pi}_1(a_2)]\varphi_1(z, 0) + \frac{h_2(z, 0)}{z_2 - h_2([\ ]_2)} \times$$

$$\times [\gamma(0, z)\nu_2([\ ]_2) - \sigma + a_1\bar{\pi}_1(a_2)];$$

в) для режима «жди наивероятного»

$$\psi(z)=\begin{cases}\psi_б(z) & \text{при } a_1 \geqslant a_2,\\ \sigma\pi^{[2]}(z, 0) & \text{при } a_1 < a_2.\end{cases}$$

Участвующие в п. а)—в) $\nu_2([\ ]_2)$ и $h_2([\ ]_2)$ определяются из соответствующих выражений для $\nu_2(s)$ и $h_2(s)$ при $s=[\ ]_2$; $\pi_1(z, 0)$, $\gamma_2(z, 0)\ldots$ — из выражений для $\pi_1(z, s)$, $\nu_2(z, s)\ldots$ при $s=0$; $\pi_1(a_2)$ и $\bar{\pi}_1(a_2)$ — из (1.30) и (1.32) при $s=a_2$; $\sigma\pi_1$ — из п. б) теорем 1.1—1.3.

Из соотношений лемм 3.1—3.11 и теорем 3.1—3.3 можно получить и моменты длины очереди (в терминах преобразования Лапласа) для любого t. Пусть, например, $\overline{m}_2(t)$ — среднее число a_2-вызовов, находящихся в системе в момент t, и пусть рассматривается конкретная схема обслуживания, например, схема 2.3 режима «сброс в нуль». Из условия

$$\int\limits_0^\infty e^{-st}\overline{m}_2(t)\,dt=\frac{\partial}{\partial z_2}\,p(z, s)\,|_{z_1=1,\ z_2=1},$$

опуская длинные выкладки ,получаем

$$\int\limits_0^\infty e^{-st}\overline{m}_2(t)\,dt=m_2(s)=\left\{\frac{a_1a_2[1-\pi_1(s)]}{s^2}+\right.$$

$$+\frac{[1-\nu_2(s)]\,a_2\widehat{\gamma}}{s^2}+\frac{a_2}{s}+\left[\frac{1}{s}\left(1+\frac{a_2}{s}\right)-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{s(1-h_2(s))}\right][\widehat{\gamma}\nu_2(s)+a_1\pi_1(s+a_2)-\sigma_1\pi(s)]\right\}\times$$

$$\times[s+\sigma-\sigma\pi(s)]^{-1}, \qquad (3.29)$$

где $\widehat{\gamma}=a_1[\pi_1(s)-\pi_1(s+a_2)]+a_2$.

Полученное соотношение и выражает среднюю длину очереди a_2-вызовов, находящихся в системе в момент времени t.

Пример. Пусть для схемы 2.3 режима «сброс в нуль»

$$C_{12}(t)=1-e^{-c_2t},\quad C_{21}(t)=1-e^{-c_1t};$$

$$B_k(t) = \frac{a_k^{\lambda_k}}{\Gamma(\lambda_k)} \int_0^t x^{\lambda_k - 1} e^{-\alpha_k x}\, dx,$$

где

$$\Gamma(\lambda_k) = \int_0^\infty x^{\lambda_k - 1} e^{-x} dx, \quad k = 1, 2.$$

Получим $\overline{m}_2(t)$ в некоторых точках $t_i \in [T_0, T]$. Для определенности примем

$$a_1 = 2.2, \quad c_1 = 10.1, \quad \alpha_1 = 12, \quad \lambda_1 = 4, \quad T_0 = 0.5,$$

$$a_2 = 0.54, \quad c_2 = 5.2, \quad \alpha_2 = 25, \quad \lambda_2 = 5, \quad T = 30.$$

Решение. Известно, что

$$c_{12}(s) = \frac{c_2}{s + c_2}, \quad c_{21}(s) = \frac{c_1}{s + c_1}, \quad \beta_k(s) = \frac{\alpha_k^{\lambda_k}}{(s + \alpha_k)^{\lambda_k}}.$$

Используя эти выражения и полученные выше соотношения (1.8), леммы 1.2, 1.7 и теорему 1.1, находим $\pi_1(s)$, $\nu_2(s)$, $h_2(s)$ и $\pi(s)$, после чего по формуле (3.29) — $m_2(s)$. Пример решен на БЭСМ-6. При обращении $m_2(s)$ использовался Алгоритм-368 [17] численного обращения преобразования Лапласа. Результаты приведены в табл. 2 (правая колонка — средняя длина очереди, левая — точки, в которых она считалась). Как видно из рис. 12, уже при $t \approx 22$ система выходит в стационарный режим.

Таблица 2

t_i	$m_2(t_i)$	t_i	$m_2(t_i)$
0.5	0.23	16	3.25
1	0.42	18	3.43
2	0.74	20	3.17
4	1.23	22	3.90
6	1.71	24	3.86
8	2.07	26	3.82
10	2.51	28	4.05
12	2.73	30	3.98
14	2.91		

Рис. 12

Глава 4

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОЧЕРЕДИ. ПОЛУОТНОСИТЕЛЬНЫЙ И ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ ПРИОРИТЕТ

§ 1

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОЧЕРЕДИ НА ОТДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ ОБСЛУЖИВАНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ПРОМЕЖУТКАХ

Сохраняются все предыдущие определения и обозначения. Так же, как и в предыдущих главах, получению основных соотношений предпошлем формулировку и доказательство некоторых вспомогательных результатов. Для схем с полуотносительным и относительным приоритетом в настоящем параграфе получим преобразование Лапласа производящих функций совместного распределения числа вызовов каждого приоритета, находящихся в системе в любой момент времени отдельного цикла обслуживания ($h_2(z, s)$) отдельного неполного цикла обслуживания ($h_2^0(z,s)$) и отдельного $\overline{\Pi}_2^0$-периода ($\pi_2^0(z, s)$).

Лемма 4.1. *Для схем 1.5, 2.5, 3.5 и 4.5 функции $h_2(z, s)$ и $h_2^0(z, s)$ определяются из выражений*

$$h_2(z, s) = \frac{1-\beta_1(s+[\ ]_1)}{z_1-\beta_1(s+[\ ]_1)}\left\{\alpha(s, z)c_{21}(s+[\ ]_1) - \frac{q(s, z)}{s+[\ ]_1}\right\} + \frac{z_2[1-\beta_2(s+[\ ]_1)]}{s+[\ ]_1} +$$

$$+\alpha(s, z)[1-c_{21}(s+[\ ]_1)] + q(s, z)\nu_2(z, s), \quad (4.1)$$

$$h_2^0(z, s) = \frac{1-\beta_1(s+[\ ]_1)}{z_1-\beta_1(s+[\ ]_1)}\left\{\alpha(s, z)c_{21}(s+[\ ]_1) - \right.$$

$$-\frac{q(z, s)}{s+[\ ]_1}\Big\} + \frac{z_2[1-\beta_2(s+[\ ]_1)]}{s+[\ ]_1} +$$

$$+\alpha(s, z)[1-c_{21}(s+[\ ]_1)]+q(s, z), \qquad (4.2)$$

где

$$q(s, z) = \{\beta_2(s+[\ ]_2 + a_1[1-\bar{\pi}_1(s+[\ ]_2)]) -$$

$$-\beta_2(s+[\ ]_2+a_1)\} c_{21}(s+[\ ]_2+a_1[1-\bar{\pi}_1(s+[\ ]_2)]), \qquad (4.3)$$

$$\alpha(s, z) = \frac{\beta_2(s+[\ ]_1)-\beta_2(s+[\ ]_2+a_1)}{s+[\ ]_1}, \qquad (4.4)$$

функции $\nu_2(z, s)$ *для каждой из схем равны:*
для схемы 1.5

$$\nu_2(z, s) = \frac{[1-c_{12}(s+[\ ]_2+a_1)][1+a_1\pi_1(z, s)]}{s+[\ ]_2+a_1-a_1[1-c_{12}(s+[\ ]_2+a_1)]\pi_1(s+[\ ]_2)}, \qquad (4.5)$$

для схемы 2.5

$$\nu_2(z, s) = \frac{1-c_{12}(s+[\ ]_2+a_1[1-\pi_1(s+[\ ]_2])}{s+[\ ]_2+a_1[1-\pi_1(s+[\ ]_2)]} \times$$

$$\times[1+a_1\pi_1(z, s)], \qquad (4.6)$$

для схемы 3.5

$$\nu_2(z, s) = [1+a_1\pi_1(z, s)] \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{\{1-e^{-(s+a_1+[\ ]_2\tau}\}\, dc_{12}(\tau)}{s+[\ ]_2+a_1-a_1\pi_1(s+[\ ]_2)[1-e^{-(s+a_1+[\ ]_2)\tau}}, \qquad (4.7)$$

для схемы 4.5

$$\nu_2(z, s) = \left\{\left[\frac{1-c_{12}(s+[\ ]_2)}{s+[\ ]_2} + \frac{[1-c_{21}(s+[\ ]_1)]\, d(s, z)}{s+[\ ]_1}\right] +\right.$$

$$\left. + z_1\frac{[1-\beta_1(s+[\ ]_1)][d(s, z)c_{21}(s+[\ ]_1)-\mu(s+[\ ]_2)]}{[z_1-\beta_1(s+[\ ]_1)]\{s+[\ ]_1\}}\right\} \times$$

$$\times[1-\mu(s+[\ ]_2)]^{-1}; \qquad (4.8)$$

$$d(s, z) = c_{12}(s+[\ ]_1) - c_{12}(s+[\ ]_2+a_1),$$

$$\mu(s+[\ ]_2)=[c_{12}(s+[\ ]_2+a_1[1-\bar{\pi}_1(s+[\ ]_2)])-$$
$$-c_{12}(s+[\ ]_2+a_1)]\,c_{21}(s+[\ ]_2+$$
$$+a_1[1-\bar{\pi}_1(s+[\ ]_2)]),$$

а участвующее выше $\pi_1(z,s)$ определяется из со- отношений леммы 3.1, $\pi_1(s+[\ ]_2)$ и $\pi_1(s+[\ ]_2)$ — из (1.1) и (1.8) при $s=s+[\ ]_2$.

Доказательство. ◑ Напомним, что если, например, П-период — какой-нибудь отдельно взятый промежуток, то через $s\pi(z, s)$ обозначена вероятность того, что первая «катастрофа» произошла на П-периоде в момент, когда в системе нет синих вызовов. Для указанных схем справедливо соотношение

$$sh_2(z,s)=z_2\int_0^\infty[1-B_2(t)]\,e^{-[\ ]_1t}\,se^{-st}\,dt+$$
$$+\sum_{n\geqslant1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_1t)^n}{n!}\,e^{-a_1t}\,e^{-[\ ]_2t}\,z_1^n\,dB_2(t)\;sc_{21}(z,s)+$$
$$+\sum_{n\geqslant1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_1t)^n}{n!}\,e^{-a_1t}e^{-[\ ]_2t}\,dB_2(t)\times$$
$$\times\sum\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_1t)^m}{m!}\,e^{-a_1t}\,e^{-[\ ]_2t}\,dC_{21}(t)\,s\bar{\pi}_1^{(n+m)}(z,s)+$$
$$+\sum_{n\geqslant1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_1t)^n}{n!}\,e^{-a_1t}\,e^{-[\ ]_2t}\,dB_2(t)\times$$
$$\times\sum\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_1t)^m}{m!}\,e^{-a_1t}\,e^{-[\ ]_2t}\,dC_{21}(t)\,[\bar{\pi}_1(s+$$
$$+[\ ]_2)]^{n+m}\,s\nu_2(z,s). \qquad (4.9)$$

Действительно, пусть первая «катастрофа» произошла на отдельном цикле обслуживания в момент, когда в системе нет синих вызовов

$<sh_2(z, s)>$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

либо первая «катастрофа» произошла во время обслуживания α_2-вызова, открывшего цикл обслуживания в момент, когда в системе нет синих вызовов $<s\beta_2(z,s)>$;

либо за длительность обслуживания такого вызова $<dB_2(t)>$ не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, поступило $n \geqslant 1$ a_1-вызовов $\left\langle \frac{(a_1t)^n}{n!} e^{-a_1t} \right\rangle$, являющихся красными $\langle z_1^n \rangle$, не поступали синие a_2-вызовы $\langle e^{-[\ ]_2t} \rangle$ и первая «катастрофа» произошла во время ориентации $(2 \to 1)$ в момент, когда в системе нет синих вызовов $<sc_{21}(z, s)>$;

либо за длительность обслуживания a_2-вызова $<dB_2(t)>$ не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, поступило $n \geqslant 1$ a_1-вызовов $\left\langle \frac{(a_1t)^n}{n!} e^{-a_1t} \right\rangle$, не поступали синие a_2-вызовы $\langle e^{-[\ ]_2t} \rangle$, за длительность ориентации $(2 \to 1)$ $<dC_{21}(t)>$ не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, поступило $m \geqslant 0$ a_1-вызовов $\left\langle \frac{(a_1t)^m}{m!} e^{-a_1t} \right\rangle$, не поступали синие a_2-вызовы $\langle e^{-[\ ]_2t} \rangle$ и первая «катастрофа» произошла на $\overline{\Pi}_1^{(n+m)}$ -промежутке в момент, когда в системе нет синих вызовов $\langle s\overline{\pi}_1^{(n+m)}(z, s) \rangle$;

либо за длительность обслуживания a_2-вызова $<dB_2(t)>$ не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, поступило $n \geqslant 1$ a_1-вызовов $\left\langle \frac{(a_1t)^n}{n!} e^{-a_1t} \right\rangle$, не поступали синие a_2-вызовы $\langle e^{-[\ ]_2t} \rangle$, за время ориентации $(2 \to 1)$ $<dC_{21}(t)>$ не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, поступило $m \geqslant 0$ a_1-вызовов $\left\langle \frac{(a_1t)^m}{m!} e^{-a_1t} \right\rangle$, не поступали синие a_2-вызовы $\langle e^{-[\ ]_2t} \rangle$, за последовавший затем $\overline{\Pi}_1^{n+m}$ -промежуток не произошло «катастрофы» и не поступали синие a_1-вызовы $\langle [\overline{\pi}_1(s + [\ ]_2]^{n+m} \rangle$ и первая «катастрофа» произошла на цикле ориентации в момент,

когда в системе нет синих вызовов $<s\nu_2(z, s)>$.

Вероятность $s\bar{\pi}_1^{(n+m)}(z, s)$ находится по формуле (3.4):

$$s\bar{\pi}_1^{(n+m)}(z, s) = s \cdot z_1 \frac{1-\beta_1(s+[\ ]_1)}{s+[\ ]_1} \times$$

$$\times \frac{z_1^{n+m} - [\bar{\pi}_1(s+[\ ]_2)]^{n+m}}{z_1 - \beta_1(s+[\ ]_1)}. \qquad (4.10)$$

Воспользовавшись выражениями (4.8), (3.5) и тем, что

$$s\beta_2(z, s) = z_2 s \frac{(1-\beta_2(s+[\ ]_1))}{(s+[\ ]_1)}, \qquad (4.11)$$

произведя в (4.9) суммирование и интегрирование, получаем (4.1). Соотношение (4.2) получается аналогично. Формулы (4.5)—(4.8), выражающие распределение длины очереди на отдельных циклах ориентации, очевидно, имеют такой же вид, что и для систем с абсолютным приоритетом. ◐

Лемма 4.2.

$$\bar{\pi}_2^0(z, s) = \frac{h_2(z, s)[h_2^0(s+[\ ]_2) - h_2^0(s+a_2) - z_2\omega_0(s)]}{[z_2 - h_2(s+[\ ]_2)]z_2[1-\omega_0(s)]},$$

где

$$\omega_0(s) = \frac{h_2^0(s+a_2[1-\bar{\pi}_2^1(s)]) - h_2^0(s+a_2)}{\bar{\pi}_2^1(s)};$$

$h_2(\lambda)$ *и* $h_2^0(\lambda)$ (*при* $\lambda = s+[\ ]_2$, $s+a_2$, $s+a_2[1-\bar{\pi}_2^1(s)]$) *определяются из соотношений леммы 4.1*, $\bar{\pi}_2^1(s)$ *и* $h_2(z, s)$ — *из (2.12) и (4.1)*.

Доказательство. ◑ Пусть $s\bar{\pi}_2^{1(n)}(z, s)$ есть вероятность того, что первая «катастрофа» произошла на отдельном $\bar{\Pi}_2^{1(n)}$-периоде в момент, когда в системе нет синих вызовов. Повторяя рассуждения, приведенные в [7] при доказательстве леммы 1, получаем

$$s\bar{\pi}_2^{1(n)}(z, s) = sh_2(z, s)\frac{z_2^n - [\bar{\pi}_2^1(s)]^n}{z_2 - h_2(s+[\ ]_2)}. \qquad (4.12)$$

Докажем равенство

$$s\overline{\pi}_2^0(z, s) = sh_2^0(z, s) + \sum_{n\geqslant 1} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t}\, dH_2^0(t) \times$$

$$\times\, s\overline{\pi}_2^{1(n-1)}(z, s) + \sum_{n\geqslant 1} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t}\, dH_2^0(t) \times$$

$$\times\, [\overline{\pi}_2^1(s)]^{n-1}\, s\overline{\pi}_2^0(z, s). \qquad (4.13)$$

Пусть первая «катастрофа» произошла на отдельном $\overline{\Pi}_2^0$ -периоде, в момент, когда в системе нет синих вызовов $\langle s\overline{\pi}_2^0(z, s)\rangle$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

либо первая «катастрофа» произошла на отдельном неполном цикле обслуживания в момент, когда в системе нет синих вызовов $\langle sh_2^0(z, s)\rangle$;

либо за длительность неполного цикла обслуживания не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, поступило $n \geqslant 1$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2} \right\rangle$ и первая «катастрофа» произошла на отдельном $\overline{\Pi}_2^{1(n-1)}$ - промежутке в момент, когда в системе нет синих вызовов

либо за длительность неполного цикла обслуживания $\langle dH_2^0(t)\rangle$ не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, поступило $n \geqslant 1$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t} \right\rangle$, за длительность $\overline{\Pi}_2^{1(n-1)}$-промежутка не произошло «катастрофы» $\langle [\overline{\pi}_2^1(s)]\rangle$ и первая «катастрофа» произошла на отдельном $\overline{\Pi}_2^0$ -периоде в момент, когда в системе нет синих вызовов $\langle s\overline{\pi}_2^0(z, s)\rangle$.

Теперь соотношение леммы 4.2 следует из (4.13) и (4.12). ◖

§ 2

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОЧЕРЕДИ ДЛЯ СИСТЕМ С РЕЖИМОМ ОРИЕНТАЦИИ «СБРОС В НУЛЬ»

Теорема 4.1. *Преобразование Лапласа производящей функции совместного распределения числа вызовов каждого потока, находящихся в системе в любой момент времени для схем с полуотносительным, относительным приоритетами и режимом ориентации «сброс в нуль» определяется из соотношений*

$$\rho(z, s) = \frac{(1+\sigma\pi(z, s))}{(s+\sigma-\sigma\pi(s))}, \tag{4.14}$$

$$\sigma\pi(z, s) = a_1\pi_1(z, s) + \gamma(s, z) +$$

$$+ \frac{\sigma\pi(s) - a_1\pi_1(s+a_2)}{\overline{\pi}_2^0(s)}\overline{\pi}_2^0(z, s) + \frac{h_2(z, s)}{z_2 - h_2(s+[\ ]_2)}\times$$

$$\times\left[\frac{\gamma(s, z)\nu_2(s+[\ ]_2)}{z_2} + \frac{a_1\pi_1(s+a_2) - \sigma\pi(s)}{\overline{\pi}_2^0(s)}\right], \tag{4.15}$$

где

$$\gamma(s, z) = a_1[\pi_1(s+[\ ]_2) - \pi_1(s+a_2)] + z_2a_2,$$

$\sigma\pi(s)$ *и* $\pi_1(\lambda)$ $(\lambda = s+[\ ]_2,\ s+a_2)$ *определяются из п. а) теоремы 2.1;* $h_2(s+[\ ]_2)$, $\overline{\pi}_2^0(s)$ *и* $\overline{\pi}_2^0(z,s)$ *из лемм 2.1 (при* $s=s+[\ ]_2$*) 2.2 и 4.2 соответственно;* $\nu_2(s+[\ ]_2)$ *из соотношений (2.1)—(2.4) (при* $s=s+$ $+[\ ]_2$*);* $\pi_1(z, s)$ *и* $\nu_2(z, s)$ *из леммы 3.1 и соотношений (4.5)—(4.8).*

Доказательство. ◑ Соотношение (4.14) совпадает с (3.13). Соотношение (4.15) следует из равенства

$$s\pi(z, s) = \frac{a_1}{\sigma}s\pi_1(z, s) + \frac{a_1}{\sigma}\sum_{n\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\times$$

$$\times z_2^n d\Pi_1(t)\, s\,\nu_2(z, s) + \frac{a_1}{\sigma}\sum_{n\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}d\Pi_1(t)\times$$

$$\times \sum_{m\geqslant 0} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^m}{m!} e^{-a_2 t} dN_2(t)\, s\bar{\pi}_2^{1(n+m-1)}(z, s) +$$

$$+ \frac{a_1}{\sigma} \sum_{n\geqslant 1} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t} d\Pi_1(t) \times$$

$$\times \sum_{m\geqslant 0} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^m}{m!} e^{-a_2 t} dN_2(t) [\bar{\pi}_2^1(s)]^{n+m-1} \times$$

$$\times s\bar{\pi}_2^0(z, s) + \frac{a_2}{\sigma} z_2 s v_2(z, s) + \frac{a_2}{\sigma} \sum_{n\geqslant 0} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^n}{n!} \times$$

$$\times e^{-a_2 t} dN_2(t)\, s\bar{\pi}_2^{1(n)}(z, s) + \frac{a_2}{\sigma} \sum_{n\geqslant 0} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^n}{n!} \times$$

$$\times e^{-a_2 t} dN_2(t) [\bar{\pi}_2^1(s)]^n s\bar{\pi}_2^0(z, s),$$

доказательство которого проводится аналогичными вероятностными рассуждениями, что и выше. Осталось воспользоваться равенством (4.12), произвести в выражении для $s\pi(z, s)$ суммирование и интегрирование и после некоторых преобразований получить (4.15).

§ 3
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОЧЕРЕДИ НА ОТДЕЛЬНОМ $\bar{\Pi}_2^{\Phi_i}$-ПЕРИОДЕ И ОТДЕЛЬНОМ Φ_i-ПЕРИОДЕ

Лемма 4.3. *Преобразование Лапласа по времени производящей функции совместного распределения числа вызовов каждого потока, находящихся в системе в любой момент времени $\bar{\Pi}_2^{\Phi_i}$ -периода для схем с полуотносительным и относительным приоритетом определяется из соотношения*

$$\pi_2^{-\varphi_1}(z, s) = \left\{\frac{z_2[1 - \beta_2([\ ]_1 + s)]}{s + [\ ]_1} + \beta_2(s + \sigma)\varphi_1(z, s)' + \right.$$

$$+\alpha(s,z)[1-c_{21}([\ ]_1+s)]+\frac{1-\beta_1(s+[\ ]_2)}{z_1-\beta_1(s+[\ ]_2)}\times$$

$$\times\left[\alpha(s,z)c_{21}(s+[\ ]_1)-\frac{q(s,z)}{s+[\ ]_1}\right]+\frac{h_2(z,s)}{z_2-h_2(s+[\ ]_2)}\times$$

$$\times\left\{\frac{h_2^0(s+[\ ]_2)-h_2^0(s+a_2)}{z_2}-\frac{h_2^0(\eta^1(s))-h_2^0(s+a_2)}{\overline{\pi}_2^1(s)}\right\}K(s)),$$

где

$$K(s)=\frac{\overline{\pi}_2^1(s)}{\overline{\pi}_2^1(s)-h_2^0(\eta^1(s))+h_2^0(s+a_2)};\qquad(4.16)$$

$\alpha(s,z)$ и $q(s,z)$ определяются из выражений (4.3) и (4.4), $h_2^0(\lambda)$ ($\lambda=s+[\ ]_2, s+a_2$, $\eta^1(s)$ и $h_2(s+[\ ]_2)$ из соотношений леммы 2.1; $\overline{\pi}_2^1(s)$ и $h_2(z,s)$ из (2.12) и (4.1), а $\varphi_1(z,s)$ для указанных схем определяется из нижеследующего соотношения.

Лемма 4.4. *Для схем 1.5, 2.5, 3.5 и 4.5 функция $\varphi_1(z,s)$ равна*

$$\varphi_1(z,s)=\left\{\frac{1-c_{21}(s+[\ ]_1)}{s+[\ ]_1}+\frac{z_1[1-\beta_1(s+[\ ]_1)]}{[s+[\ ]_1][z_1-\beta_1(s+[\ ])]}\times\right.$$

$$\times\psi(s,z)+\varkappa(s,z)\nu_2(z,s)+\frac{sh_2(z,s)}{z_2-h_2(s+[\ ]_2)}\times$$

$$\times\left\{\left[\frac{\nu_2(s+[\ ]_2)}{z_2}\varkappa(s,z)-\frac{\nu_2(\eta^1(s))}{\overline{\pi}_2^1(s)}[c_{21}(\xi(\eta^1(s)))-\right.\right.$$

$$\left.-c_{21}(\xi(s+a_2))]+\left[\frac{h_2^0(s+[\ ]_2)-h_2^0(s+a_2)}{z_2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{h_2^0(\eta^1(s)-h_2^0(s+a_2))}{\overline{\pi}_2^1(s)}\right]\right\}K(s)+\left\{z_2\frac{1-\beta_2(s+[\ ]_1)}{s+[\ ]_1}+\right.$$

$$+q(s,z)[1-c_{21}(s+[\ ]_1)]+\frac{1-\beta_1(s+[\ ]_2)}{z_1-\beta_1(s+[\ ]_2)}\times$$

$$\left.\left.\times\left[q(s,z)c_{21}(s+[\ ]_1)-\frac{\alpha(s,z)}{s+[\ ]_1}\right]\right\}K(s)\right\}\times$$

$$\times[1-\beta_2(s+\sigma)K(s)]^{-1},$$

где использованы следующие обозначения: для $\varkappa(s,z)$, $\psi(s,z)$, $\alpha(s,z)$, $q(s,z)$ и $K(s)$ — (3.17);

(3.18), (4.4), (4.3) и (4.16), а фигурирующие выше $\xi(s)$ и $\eta^1(s)$ задаются равенством (2.19).

Доказательство леммы 4. 3. ◑ Пусть первая «катастрофа» произошла на отдельном $\overline{\Pi}_2^{\Phi_1}$ -периоде в момент, когда в системе нет синих вызовов $\langle s\overline{\pi}_2^{\varphi_1}(z, s)\rangle$.

Можно показать, что имеет место следующее равенство:

$$s\overline{\pi}_2^{\varphi_1}(z, s) = s\beta_2(z, s) + \beta_2(s+\sigma)s\varphi_1(z, s) +$$

$$+\sum_{n\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-st}e^{-[\ ]_2 t}\frac{(a_1t)^n}{n!}e^{-a_1t}z_1^n\,dB_2(t)\,sc_{21}(z, s) +$$

$$+\sum_{n\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-st}e^{-[\ ]_2 t}\frac{(a_1t)^n}{n!}e^{-a_1t}z_1^n\,dB_2(t)\times$$

$$\times\sum_{m\geqslant 0}\int_0^\infty e^{-st}e^{-[\ ]_2 t}\frac{(a_1t)^m}{m!}e^{-a_1t}\,dC_{21}(t)\,s\overline{\pi}_1^{(m+n)}(z, s) +$$

$$+\sum_{n\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,dH_2^0(t)\,s\overline{\pi}_2^{1(n-1)}(z, s) +$$

$$+\sum_{n\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,dH_2^0(t)(\overline{\pi}_2^1(s))^{(n-1)}s\overline{\pi}_2^{\varphi_1}(z, s).$$

Откуда, имея в виду (4.10) и (4.11), произведя суммирование и интегрирование и воспользовавшись обозначением (4.16), получаем требуемое. ◐

Доказательство леммы 4.4. ◑ Основное соотношение имеет вид

$$s\varphi_1(z, s) = s\frac{1-c_{21}(s+[\ ]_1)}{s+[\ ]_1} +$$

$$+\sum_{n\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_1t)^n}{n!}e^{-a_1t}e^{-[\ ]_2 t}\,dC_{21}(t)\,s\overline{\pi}_1^{(n)}(z, s) +$$

$$+\sum_{n\geq 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}z_2^n\,d\widehat{\Pi}(t)\,s\nu_2(z,s)+$$

$$+\sum_{n\geq 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,d\widehat{\Pi}(t)\times$$

$$\times\sum_{k\geq 0}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^k}{k!}e^{-a_2t}\,dN_2(t)\,s\overline{\pi}_2^{1(n+k-1)}(z,s)+$$

$$+\sum_{n\geq 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,d\widehat{\Pi}(t)\times$$

$$\times\sum_{k\geq 0}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^k}{k!}e^{-a_2t}\,dN_2(t)\,\overline{\pi}_2^{1(n+k-1)}(s)\,s\overline{\pi}_2^{\varphi_1}(z,s)+$$

$$+\sum_{n\geq 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}e^{-a_1t}z_2^n\,dC_{21}(t)\,s\nu_2(z,s)+$$

$$+\sum_{n\geq 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}e^{-a_1t}\,dC_{21}(t)\times$$

$$\times\sum_{k\geq 0}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^k}{k!}e^{-a_2t}\,dN_2(t)\,s\overline{\pi}_2^{1(n+k-1)}(z,s)+$$

$$+\sum_{n\geq 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}e^{-a_1t}\,dC_{21}(t)\times$$

$$\times\sum_{k\geq 0}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^k}{k!}e^{-a_2t}\,dN_2(t)\,\overline{\pi}_2^{1(n+k-1)}(s)\,s\overline{\pi}_2^{\varphi_1}(z,s).$$

Из приведенного выражения, справедливость которого устанавливается подобными вероятностными рассуждениями, что и выше, получаем $\varphi_1(z, s)$. Требуется лишь просуммировать, проинтегрировать, сгруппировать члены с $\overline{\pi}_2^{\varphi_1}(z, s)$, воспользо-

ваться выражением леммы 4.3 и обозначениями (3.17), (3.18), (4.3), (4.4), (4.16) и (2.19). ◐

Для $\bar{\pi}_2^{\varphi_2}(z, s)$ и $\varphi_2(z, s)$ имеют место аналогичные соотношения, что и для полученных выше $\bar{\pi}_2^{\varphi_1}(z, s)$ и $\varphi_1(z, s)$. Эти соотношения сформулируем также в виде лемм.

Лемма 4.5. *Для схем 1.5, 2.5, 3.5 и 4.5 функция* $\bar{\pi}_2^{\varphi_2}(z, s)$ *определяется из выражения*

$$\bar{\pi}_2^{\varphi_2}(z, s) = \Big\{z_2 \frac{1-\beta_2(s+[\ ]_1)}{s+[\ ]_1} + \alpha(s, z)[1-c_{21}(s+[\ ]_1)] +$$

$$+ \frac{1-\beta_1(s+[\ ]_1)}{z_1-\beta_1(s+[\ ]_1)}\left[\alpha(s, z)c_{21}(s+[\ ]_1) - \frac{q(s, z)}{s+[\ ]_1}\right] +$$

$$+ q(s, z)\varphi_2(z, s) + \frac{h_2(z, s)}{z_2-h_2(s+[\ ]_2)} +$$

$$+ \left[\frac{h_2^0(s+[\ ]_2)-h_2^0(s+a_2)}{z_2} - \frac{h_2^0(\eta^1(s)-h_2^0(s+a_2)}{\bar{\pi}_2^1(s)}\right]\Big\} K(s),$$

где $\alpha(s, z)$, $q(s, z)$ *и* $K(s)$ *определяются из выражений (4.4), (4.3) и (4.16);* $h_2^0(\lambda)$ $(\lambda = s+[\ ]_2$, $s+a_2$, $\eta^1(s)$*и* $h_2(s+[\ ]_2)$ *— из соотношений леммы 2.1;* $\bar{\pi}_2^1(s)$ *и* $h_2(z, s)$ *— из (2.12) и (4.1), а* $\varphi_2(z, s)$ *определяется из следующего выражения.*

Лемма 4.6. *Для схем с полуотносительным и относительным приоритетом*

$$\varphi_2(z, s) = \Big\{\nu_2(z, s) + \frac{h_2(z, s)}{z_2-h_2(s+[\ ]_2)} \times$$

$$\times\left[\frac{\nu_2(s+[\ ]_2)-\nu_2(s+a_2)}{z_2} - \frac{\nu_2(\eta^1(s))-\nu_2(s+a_2)}{\bar{\pi}_2^1(s)}\right] +$$

$$+ \frac{\nu_2(\eta^1(s))-\nu_2(s+a_2)}{\bar{\pi}_2^1(s)}\Big\{\frac{z_2[1-\beta_2(s+[\ ]_1)]}{s+[\ ]_1} +$$

$$+ \alpha(s, z)[1-c_{21}(s+[\ ]_1)] + \frac{1-\beta_1(s+[\ ]_1)}{z_1-\beta_1(s+[\ ]_1)} \times$$

$$\times\left[\alpha(s, z)c_{21}(s+[\ ]_1) - \frac{q(s, z)}{s+[\ ]_1}\right] + \frac{h_2(z, s)}{z_2-h_2(s+[\ ]_2)} \times$$

$$\times \left[\frac{h_2^0(s+[\ ]_2) - h_2^0(s+a_2)}{z_2} - \frac{h_2^0(\eta^1(s)) - h_2^0(s+a_2)}{\overline{\pi}_2^1(s)} \right] \Bigg\} K(s) \Bigg\} \times$$

$$\times \left[1 - \frac{\nu_2(\eta^1(s)) - \nu_2(s+a_2)}{\overline{\pi}_2^1(s)} K(s)\, q(s, z) \right]^{-1},$$

где $h_2^0(\lambda)$ *и* $\nu_2(\lambda)$ $(\lambda = s+[\ ]_2,\ s+a_2,\ \eta^1(s))$ *определяются из леммы 2.1 и соотношений (2.1)—(2.4) соответственно для каждой из схем;* $h_2(s+[\ ]_2)$, $\overline{\pi}_2^1(s)$ *и* $h_2(z, s)$ *— из леммы 2.1, соотношений (2.12) и (4.1);* $\alpha(s, z)$, $q(s, z)$ *и* $K(s)$ *— из (4.4), (4.3) и (4.16).*

Доказательство лемм 4.5 и 4.6 аналогично доказательству лемм 4.3 и 4.4.

§ 4

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОЧЕРЕДИ ДЛЯ СИСТЕМ С РЕЖИМОМ ОРИЕНТАЦИИ «СМОТРИ ВПЕРЕД» И «ЖДИ НАИВЕРОЯТНОГО»

Теорема 4.2. *Для схем 1.5, 2.5, 3.5, 4.5 и режимом ориентации «смотри вперед»*

$$p(z, s) = \frac{(1+\sigma\pi(z, s))}{(s+\sigma-\sigma\pi(s))}, \qquad (4.17)$$

$$\sigma\pi(z, s) = a_1 \overline{\pi}_1(z, s) + \nu_2(z, s)\, \overline{\gamma}(s, z) + \frac{h_2(z, s)}{z_2 - h_2(s+[\ ]_2)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\overline{\gamma}(s, z)\, \nu_2(s+[\ ]_2)}{z_2} - \overline{A}(s) \right\} + \overline{A}(s)\, \overline{\pi}_2^{\varphi_1}(z, s), \qquad (4.18)$$

где

$$\overline{A}(s, z) = a_2 \nu_2(\eta'(s)) + \frac{a_1 \nu_2(\eta'(s))}{\overline{\pi}_2^1(s)} \times$$

$$\times [\overline{\pi}_1(\eta'(s)) - \overline{\pi}_1(s+a_2)], \qquad (4.19)$$

$$\overline{\gamma}(s, z) = a_1 [\overline{\pi}_1(s+[\ ]_2) - \overline{\pi}_1(s+a_2)] + a_2 z_2.$$

Величины $h_2(s+[\ ]_2)$ *и* $\nu_2(\lambda)$ $(\lambda = s+[\ ]_2, \eta_1(s))$ *и* *определяются из (2.5) и (2.1)—(2.4);* $\sigma\pi(s)$

$\pi_1(\lambda)$ ($\lambda = s + a_2$, $s + [\ ]_2$, $\eta^1(s)$) *определяются из п. а) теоремы 2.2; $h_2(z, s)$ и $\nu_2(z, s)$ из соотношений (4.1) и (4.5)—(4.8); $\overline{\pi}_2^1(s)$ и $\pi_1(z, s)$ — из (2.12) и (3.22), а $\overline{\pi}_2^{\varphi_1}(z, s)$ задается леммой 4.5.*

Доказательство. ◑ Формула (4.17) совпадает, очевидно, с (3.13). Получим (4.18). Пусть рассматриваются схемы с полуотносительным и относительным приоритетом и способом ориентации прибора в свободном состоянии «смотри вперед». Пусть, кроме того, первая «катастрофа» произошла на отдельном периоде занятости в момент, когда в системе нет синих вызовов $< s\pi(z, s) >$. Для этого можно показать, что необходимо и достаточно выполнение равенства

$$
\begin{aligned}
s\pi(z, s) &= \frac{a_1}{\sigma} s\overline{\pi}_1(z, s) + \\
&+ \frac{a_1}{\sigma} \sum_{n \geq 1} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t} z_2^n d\overline{\Pi}_1(t)\, s\nu_2(z, s) + \\
&+ \frac{a_1}{\sigma} \sum_{n \geq 1} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t} d\overline{\Pi}_1(t) \times \\
&\times \sum_{k \geq 0} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^k}{k!} e^{-a_2 t} dN_2(t)\, s\overline{\pi}_2^{1(n+k-1)}(z, s) + \\
&+ \frac{a_1}{\sigma} \sum_{n \geq 1} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t} d\overline{\Pi}_1(t) \times \\
&\times \sum_{k \geq 0} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^k}{k!} e^{-a_2 t} dN_2(t)\, \overline{\pi}_2^{1(n+k-1)}(s)\, s\overline{\pi}_2^{\varphi_1}(z, s) + \\
&+ \frac{a_2}{\sigma} z_2 s\nu_2(z, s) + \\
&+ \frac{a_2}{\sigma} \sum_{n \geq 0} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t} dN_2(t)\, s\overline{\pi}_2^{1(n)}(z, s) + \\
&+ \frac{a_2}{\sigma} \sum_{n \geq 0} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t} dN_2(t)\, \overline{\pi}_2^{1(n)}(s)\, s\overline{\pi}_2^{\varphi_1}(z, s).
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

Произведя в (4.20) суммирование и интегрирование, получаем (4.18). ◐

Теорема 4.3. *Для схем 1.5, 2.5, 3.5, 4.5 и режимом ориентации «жди наивероятного»*

$$p(z, s) = \begin{cases} [1+\sigma\pi^{[1]}(z, s)]\,[s+\sigma-\sigma\pi^{[1]}(s)]^{-1} & \textit{при } a_1 \geqslant a_2, \\ [1+\sigma\pi^{[2]}(z,s)]\,[s+\sigma-\sigma\pi^{[2]}(s)]^{-1} & \textit{при } a_1 < a_2 \end{cases} \quad (4.21)$$

$$\sigma\pi^{[1]}(z, s) = a_1 \bar{\pi}_1(z, s) + \nu_2(z, s)\,\bar{\gamma}(s, z) + \bar{A}(s)\,\bar{\pi}_2^{\varphi_1}(z, s) + \frac{h_2(z, s)}{z_2 - h_2(s + [\ ]_2)} \times \left[\frac{\bar{\gamma}(s, z)\,\nu_2(s + [\ ]_2)}{z_2} - \bar{A}(s)\right], \quad (4.22)$$

$$\sigma\pi^{[2]}(z, s) = a_1 \pi_1(z, s) + a_1 \pi_1(s + a_2)\,\varphi_2(z, s) + \omega(s, z)\,\nu_2(z, s) + \frac{h_2(z, s)}{z_2 - h_2(s + [\ ]_2)} \times \left[\frac{\omega(s, z)\,\nu_2(s + [\ ]_2)}{z_2} - A(s)\right] + [A(s) + a_2]\,\bar{\pi}_2^{\varphi_2}(z, s), \quad (4.23)$$

$$\sigma\pi^{[1]}(s) = a_1 \left\{\bar{\pi}_1(s + a_2) + [\bar{\pi}_1(\eta^1(s)) - \bar{\pi}_1(s + a_2)] \times \frac{\bar{\pi}_2^{\varphi_1}(s)}{\bar{\pi}_2^1(s)}\,\nu_2(\eta^1(s))\right\} + a_2\,\nu_2(\eta^1(s))\,\bar{\pi}_2^{\varphi_1}(s), \quad (4.24)$$

$$\sigma\pi^{[2]}(s) = a_1 \left\{\pi_1(s + a_2)\,\varphi_2(s) + [\pi_1(\eta^1(s)) - \pi_1(s + a_2)] \times \frac{\bar{\pi}^{\varphi_2}(s)}{\bar{\pi}_2^1(s)}\,\nu_2(\eta'(s))\right\} + a_2\,\bar{\pi}_2^{\varphi_2}(s), \quad (4.25)$$

$$A(s) = a_1 \frac{\nu_2(\eta'(s))}{\bar{\pi}_2'(s)}\,[\pi_1(\eta'(s)) - \pi_1(s + a_2)],$$

где

$$\omega(s, z) = a_1 [\pi_1(s + [\ ]_2) - \pi_1(s + a_2)];$$

функции $h_2(s+[\ ]_2)$ *и* ν_2^{λ} $(\lambda = s+[\ ]_2, \eta^1(s))$ *определяются из (2.5) и (2.1)—(2.4);* $h_2(z, s)$ *и* $\nu_2(z,$

s)—*из* (4.1) *и* (4.5)—(4.8) *соответственно*; $\bar{\pi}_1(z, s)$ — *из* (3.22); $\pi_1(z, s)$, $\bar{\pi}_2^{\varphi_1}(z, s)$ и $\bar{\pi}_2^{\varphi_2}(z, s)$ *определяются из лемм* 3.1, 4.3 *и* 4.5; $\bar{\pi}_2^{\varphi_1}(s)$, $\bar{\pi}_2^{\varphi_2}(s)$ *и* $\varphi_2(s)$ — *из* (2.18), (2.23) *и леммы* 2.4; $\bar{\pi}_2^1(s)$ — *из функционального уравнения* (2.12); $\pi_1(\lambda)$ *и* $\bar{\pi}_1(\lambda)$ $(\lambda = s + a_2\eta^1(s))$ *из* (1.1) *и* (2.16); $\gamma(s, z)$ *и* $A(s)$ — *из* (3.20) *и* (4.19).

Доказательство. ◐ Соотношение (4.21) совпадает с (3.24). Выражение (4.22) получено при доказательстве теоремы 4.2. Соотношения (4.24) представляют собой распределение (в терминах преобразования Л. — С.) периода занятости для схем 1.5, 2.5, 3.5 и 4.5 и режимом ориентации «смотри вперед»; соотношение (4.25) — распределение длины периода занятости для тех же схем и следующим способом ориентации прибора в свободном состоянии: по окончании периода занятости прибор сразу же ориентируется на обслуживание a_2-вызова.

Таким образом, соотношение (4.24) получено при доказательстве теоремы 2.2, (4.25) — при доказательстве теоремы 2.3. Осталось получить (4.23). Теми же приемами, что и выше, устанавливается справедливость выражения

$$s\pi^{[2]}(z, s) = \frac{a_2}{\sigma} s\bar{\pi}_2^{\varphi_2}(z, s) + \frac{a_1}{\sigma} s\pi_1(z, s) +$$

$$+ \frac{a_1}{\sigma} \pi_1(s + a_2) s\varphi_2(z, s) +$$

$$+ \frac{a_1}{\sigma} \sum_{n \geqslant 1} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t} z_2^n \, d\Pi_1(t) s\nu_2(z, s) +$$

$$+ \frac{a_1}{\sigma} \sum_{n \geqslant 1} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_1 t} \, d\Pi_1(t) \times$$

$$\times \sum_{m \geqslant 0} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^m}{m!} e^{-a_2 t} \, dN_2(t) s\bar{\pi}_2^{1(n+m-1)}(z, s) +$$

$$+ \frac{a_1}{\sigma} \sum_{n \geqslant 1} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t} \, d\Pi_1(t) \times$$

$$\times \sum_{m\geq 0} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2t)^m}{m!} e^{-a_2t} dN_2(t)\, \overline{\pi}_2^{1(n+m-1)}(s)\, s\overline{\pi}_2^{\varphi_2}(z, s).$$

Действительно, пусть прибор в свободном состоянии ориентирован на обслуживание a_2-вызова и пусть первая «катастрофа» произошла на отдельном периоде занятости в момент, когда в системе нет синих вызовов $< s\pi^{[2]}(z, s) >$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

либо в свободную систему поступил a_2-вызов $< a_2/\sigma >$ и первая «катастрофа» произошла на отдельном $\overline{\Pi}_2^{\Phi_2}$ -периоде в момент, когда в системе нет синих вызовов $\langle s\overline{\pi}^{\varphi_2}(z, s)\rangle$;

либо в свободную систему поступил a_2-вызов $< a_1/\sigma >$, начался Π_1-период и первая «катастрофа» произошла за время его осуществления в момент, когда в системе нет синих вызовов

$$\langle s\pi_1(z, s)\rangle;$$

либо в свободную систему поступил a_1-вызов $< a_1/\sigma >$, за Π_1-период не произошло «катастрофы» и не поступили a_2-вызовы $< \pi_1(s+a_2) >$ и первая «катастрофа» произошла на отдельном Φ_2-периоде в момент, когда в системе нет синих вызовов

$$\langle s\varphi_2(z, s)\rangle;$$

либо в свободную систему поступил a_1-вызов $< a_1/\sigma >$, за длительность Π_1-периода $< d\Pi_1(t) >$ не произошло «катастрофы» $< e^{-st} >$, поступило $n \geq 1$ красных a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2t)^n}{n!} e^{-a_2t} z_2^n \right\rangle$ и первая «катастрофа» произошла на отдельном цикле ориентации в момент, когда в системе нет синих вызовов

$$\langle s\nu_2(z, s)\rangle;$$

либо в свободную систему поступил a_1-вызов $< a_1/\sigma >$, за длительность Π_1-периода $< d\Pi_1(t) >$ не произошло «катастрофы» $< e^{-st} >$, поступило $n \geq 1$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2t)^n}{n!} e^{-a_2t} \right\rangle$, за длительность на-

чавшегося затем цикла ориентации $<dN_2(t)>$ также не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, поступило $m\geqslant 0$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2t)^m}{m!} e^{-a_2t} \right\rangle$ и первая «катастрофа» произошла на отдельном $\overline{\Pi}_2^{1(n+m-1)}$-периоде в момент, когда в системе нет синих вызовов $\langle s\overline{\pi}^{1(n+m-1}(z, s)\rangle$;

либо в свободную систему поступил a_1-вызов $<a_1|\sigma>$, за длительность Π_1-периода $<d\Pi_1(t)>$ не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, поступило $n\geqslant 1$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2t)^n}{n!} e^{-a_2t} \right\rangle$, за длительность начавшегося затем цикла ориентации $<dN_2(t)>$ не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, поступило $m\geqslant 0$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2t)^m}{m!} e^{-a_2t} \right\rangle$, за длительность начавшегося затем $\overline{\Pi}_2^{1(n+m-1)}$-периода также не произошло «катастрофы» $\langle \overline{\pi}_2^{1(n+m-1)}(s)\rangle$ и первая «катастрофа» произошла на отдельно взятом $\overline{\Pi}_2\Phi_2$-периоде в момент, когда в системе нет синих вызовов $\langle s\pi_2^{\varphi_2}(z, s)\rangle$.

Из доказанного выражения после суммирования и интегрирования и следует (4.23). ◐

Следствие. При выполнении условий $a_1\beta_{11}<1$ и $a_2h_{21}<1$ существует

$$\lim_{t\to\infty} p(z, t) = P(z) \text{ и } P(z) = \frac{1+\sigma\pi(z, 0)}{1+\sigma\pi_1},$$

где $\pi(z, 0)$ и π_1 для схем 1.5, 2.5, 3.5, 4.5 и каждого режима определяются

а) для режима «сброс в нуль» из (4.14) при $s=0$ и п. б) теоремы 2.1;

б) для режима «смотри вперед» из (4.18) при $s=0$ и п. б) теоремы 2.2;

в) для режима «жди наивероятного»

$$\pi(z, 0) = \begin{cases} \pi^{[1]}(z, 0) \text{ при } a_1 \geqslant a_2, \\ \pi^{[2]}(z, 0) \text{ при } a_1 < a_2, \end{cases}$$

и п. б) теоремы 2.3.

Глава 5

ВЕРОЯТНОСТИ СОСТОЯНИЯ ПРИБОРА

§ 1
ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим функционирование двухприоритетной модели с ориентацией. В любой фиксированный момент времени прибор может находиться в одном и только в одном из следующих состояний: 1) прибор занят ориентацией ($2\to1$); 2) прибор занят обслуживанием вызова приоритета 1; 3) прибор занят ориентацией ($1\to2$); 4) прибор занят обслуживанием вызова приоритета 2; 5) прибор не занят ни ориентацией к обслуживанию, ни обслуживанием (система свободна от вызовов).

Цель настоящей главы — получить соотношения, позволяющие находить вероятность нахождения прибора в любом из состояний 1—5 при любом t. Ответ дается в терминах преобразования Лапласа и Л. — С.

Отметим, что из полученных соотношений (§ 5) можно найти (предельным переходом) и стационарные характеристики состояния прибора. Кроме того, изложенные ниже приемы могут быть использованы для получения нестационарных характеристик прибора и для обычных (без ориентации) приоритетных систем *.

§ 2
ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Пусть $\mathcal{P}_j(t)$ есть вероятность нахождения прибора в состоянии $j\,(j=\overline{1,5})$. Будем интересоваться

* См. Мишкой Г. К. Вероятности состояния приоритетных систем в нестационарном режиме. Кишинев, «Штиинца», 1979.

только вероятностями первых четырех состояний, так как $\mathcal{P}_5(t)=1-\sum_{i=1}^{4}\mathcal{P}_i(t)$. Ограничимся рассмотрением схем 1.1—1.3 и 2.1—2.3 для режимов «сброс в нуль» и «смотри вперед». Результаты, полученные для этих схем, могут быть распространены (теми же приемами) и на остальные системы гл. 0.

Пусть, как обычно, независимо от функционирования системы происходят «катастрофы», поток которых является пуассоновским с параметром $s>0$. Тогда $sp_j(s)=\int\limits_0^\infty \mathcal{P}_j(t)\,se^{-st}\,dt$ есть вероятность того, что первая «катастрофа» произошла в момент, когда прибор находился в состоянии $j\,(j=\overline{1,4})$. Будем находить $sp_j(s)$ исходя из этого вероятностного смысла, для чего введем еще некоторые обозначения.

Через $s_jh_2(s)$ $(s_j\overline{\pi}_2(s),\ s_j\overline{\pi}_2^{(n)}(s)$ и т. д) будем обозначать вероятность того, что первая «катастрофа» произошла на отдельном цикле обслуживания ($\overline{\Pi}_2$-периоде, $\overline{\Pi}_2^{(n)}$ -периоде и т. д.) в момент, когда прибор находился в состоянии $j\,(j=\overline{1,4})$. Кроме того, потребуются некоторые вспомогательные соотношения, которые получим в § 3 и 4.

§ 3

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Лемма 5.1. *Для всех рассматриваемых схем (1.1—1.3 и 2.1—2.3)*

$$ {}_j\overline{\pi}_2^{(n)}(s)=\frac{{}_jh_2(s)\,\{1-[\overline{\pi}_2(s)]^n\}}{1-h_2(s)}, \tag{5.1}$$

где $h_2(s)$ для каждой из рассматриваемых схем задается соотношениями лемм 1.5—1.7; $\overline{\pi}_2(s)$ — соотношением (1.31); ${}_jh_2(s)$ для каждого $j\,(j=1,4)$ (и каждой из рассматриваемых схем) будет получено ниже.

Доказательство. ◐ Прежде всего убедимся, что

$$s_j\bar{\pi}^{(n)}(s) = s_j\bar{\pi}_2(s)\,\frac{1-[\bar{\pi}_2(s)]^n}{1-\bar{\pi}_2(s)}. \qquad (5.2)$$

Действительно, из строения $\bar{\Pi}_2^{(n)}$-периода и вероятностного смысла $s_j\bar{\pi}_2(s)$ следует

$$s_j\bar{\pi}_2^{(n)}(s) = s_j\bar{\pi}_2(s) + \bar{\pi}_2(s)\,s_j\bar{\pi}_2(s) + \ldots$$
$$\ldots + [\bar{\pi}_2(s)]^{n-1}\,s_j\bar{\pi}_2(s),$$

откуда получаем (5.2). Далее, справедливо равенство

$$s_j\bar{\pi}_2(s) = s_jh_2(s) + \sum_{n\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-st}\,\frac{(a_2t)^n}{n!}\times$$
$$\times\, e^{-a_2t}\,dH_2(t)\,s_j\bar{\pi}_2^{(n)}(s),$$

которое доказывается следующими вероятностными рассуждениями. Для того чтобы первая «катастрофа» произошла на отдельном $\bar{\Pi}_2$-периоде в момент, когда прибор находится в состоянии $j\ (j=\overline{1,4})$ $\langle s_j\bar{\pi}(s)\rangle$, необходимо и достаточно, чтобы

либо первая «катастрофа» произошла на отдельном цикле обслуживания в момент, когда прибор находится в состоянии $j\langle s_jh_2(s)\rangle$;

либо за длительность цикла обслуживания $\langle dH_2(t)\rangle$ не произошло «катастрофы» $\langle e^{-st}\rangle$, поступило $n\geqslant 1$ a_2-вызовов $\left\langle\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\right\rangle$ и первая «катастрофа» произошла на отдельном $\bar{\Pi}_2^{(n)}$-периоде в момент, когда прибор находится в состоянии $j\ \langle s_j\bar{\pi}_2^{(n)}(s)\rangle$. Подставляя выражение для $s_j\bar{\pi}_2^{(n)}(s)$ в последнее соотношение, просуммировав и проинтегрировав, имеем

$$s_j\bar{\pi}_2(s) = \frac{s_jh_2(s)\,[1-\bar{\pi}_2(s)]}{1-\bar{\pi}_2(s)-h_2(s)+h_2(s+a_2[1-\bar{\pi}_2(s)])}.$$

Или, учитывая, что $\bar{\pi}_2(s) = h_2(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2(s)])$, окончательно получим

$$s_j\pi_2(s) = \frac{s_j h_2(s)[1 - \bar{\pi}_2(s)]}{1 - h_2(s)}. \qquad (5.3)$$

Осталось подставить (5.3) в (5.2) и получим (5.1). ◐

Лемма 5.2.

$$s_2\bar{\pi}_1(s) = 1 - \bar{\pi}_1(s), \qquad (5.4)$$

$$s_2\bar{\pi}_1^{(n)}(s) = 1 - [\bar{\pi}_1(s)]^n. \qquad (5.5)$$

Доказательство. ◐ Как при доказательстве леммы 5.1, получим соотношения

$$s_2\bar{\pi}_1^{(n)}(s) = s_2\bar{\pi}_1(s)\frac{1 - [\bar{\pi}_1(s)]^n}{1 - \bar{\pi}_1(s)}, \qquad (5.6)$$

$$s_2\bar{\pi}_1(s) = s_2\beta_1(s)\frac{1 - \bar{\pi}_1(s)}{1 - \beta_1(s)}.$$

Из последнего соотношения, учитывая, что

$$s_2\beta_1(s) = \int_0^\infty [1 - B_1(t)]\, se^{-st}dt = s\,\frac{1 - \beta_1(s)}{s},$$

имеем (5.4). Подставляя далее (5.4) в (5.6), получаем (5.5). ◐

§ 4
ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРИБОРА НА ОТДЕЛЬНОМ ЦИКЛЕ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Функции ${}_jh_2(s)$ для каждого j ($j = 1,4$) и каждой из указанных схем выражаются следующими соотношениями:

1) $j = 1$.

Для схем 1.1 и 2.1

$${}_1h_2(s) = \frac{a_1[1 - \beta_2(s + a_1)]\{s^{-1}[1 - c_{21}(s)] + \pi_1(s)\,{}_1\nu_2(s)\}}{s + a_1 - a_1[1 - \beta_2(s + a_1)]\,\pi_1(s)\,\nu_2(s)}; \qquad (5.7)$$

для схем 1.2 и 2.2

$$ {}_1h_2(s)=\frac{a_1}{s+a_1}[1-\beta_2(s+a_1)]\{s^{-1}[1-$$
$$-c_{21}(s)]+\pi_1(s)\,{}_1\nu_2(s)\}; \qquad (5.8)$$

для схем 1.3 и 2.3

$$ {}_1h_2(s)=\frac{a_1[1-\beta_2(s+a_1[1-\pi_1(s)\,\nu_2(s)])]}{s+a_1[1-\pi_1(s)\,\nu_2(s)]}\times$$
$$\times\{s^{-1}[1-c_{21}(s)]+\bar{\pi}_1(s)\,{}_1\nu_2(s)\}, \qquad (5.9)$$

где ${}_1\nu_2(s)$ для каждой из рассмотренных схем равно:

для схем 1.1—1.3

$$ {}_1\nu_2(s)=\frac{a_1 s^{-1}[1-c_{21}(s)]\,[1-c_{12}(s+a_1)]}{s+a_1-a_1[1-c_{12}(s+a_1)]\,\pi_1(s)}, \qquad (5.10)$$

для схем 2.1—2.3

$$ {}_1\nu_2(s)=\frac{a_1 s^{-1}[1-c_{21}(s)]\,[1-c_{12}(s+a_1[1-\pi_1(s)])]}{s+a_1[1-\pi_1(s)]}; \qquad (5.11)$$

2) $j=2$.

Для схем 1.1 и 2.1

$$ {}_2h_2(s)=\frac{a_1[1-\beta_2(s+a_1)]\{c_{21}(s)\,s^{-1}[1-\bar{\pi}_1(s)]+\pi_1(s)\,{}_2\nu_2(s)\}}{s+a_1-a_1[1-\beta_2(s+a_1)]\,\pi_1(s)\,\nu_2(s)}; \qquad (5.12)$$

для схем 1.2 и 2.2

$$ {}_2h_2(s)=\frac{a_1[1-\beta_2(s+a_1)]}{s+a_1}\times$$
$$\times\{c_{21}(s)\,s^{-1}[1-\bar{\pi}_1(s)]+\pi_1(s)\,{}_2\nu_2(s)\}; \qquad (5.13)$$

для схем 1.3 и 2.3

$$ {}_2h_2(s)=\frac{a_1[1-\beta_2(s+a_1[1-\pi_1(s)\,\nu_2(s)])]}{s+a_1[1-\pi_1(s)\,\nu_2(s)]}\times$$
$$\times\{c_{21}(s)\,s^{-1}[1-\bar{\pi}_1(s)]+\pi_1(s)\,{}_2\nu_2(s)\}, \qquad (5.14)$$

где ${}_2\nu_2(s)$ для каждой из схем равно:

для схем 1.1—1.3

$$ {}_2\nu_2(s) = \frac{a_1[1-c_{12}(s+a_1)]\,c_{21}(s)\,s^{-1}\,[1-\bar{\pi}_1(s)]}{s+a_1-a_1[1-c_{12}(s+a_1)]\,\pi_1(s)}, \qquad (5.15) $$

для схем 2.1—2.3

$$ {}_2\nu_2(s) = \frac{a_1[1-c_{12}(s+a_1[1-\pi_1(s)])]\,c_{21}(s)\,s^{-1}\,[1-\bar{\pi}_1(s)]}{s+a_1[1-\pi_1(s)]} \qquad (5.16) $$

3) $j=3$.

Для схем 1.1 и 2.1

$$ {}_3h_2(s) = \frac{a_1[1-\beta_2(s+a_1)]\,\pi_1(s)\,{}_3\nu_2(s)}{s+a_1-a_1[1-\beta_2(s+a_1)]\,\pi_1(s)\,\nu_2(s)}, \qquad (5.17) $$

Для схем 1.2 и 2.2

$$ {}_3h_2(s) = \frac{a_1\pi_1(s)\,{}_3\nu_2(s)}{s+a_1}\,[1-\beta_2(s+a_1)], \qquad (5.18) $$

для схем 1.3 и 2.3

$$ {}_3h_2(s) = \frac{a_1\{1-\beta_2(s+a_1[1-\pi_1(s)\,\nu_2(s)])\}}{s+a_1[1-\pi_1(s)\,\nu_2(s)]}\,\pi_1(s)\,{}_3\nu_2(s), \qquad (5.19) $$

где ${}_3\nu_2(s)$ для каждой из схем равно:

для схем 1.1—1.3

$$ {}_3\nu_2(s) = \frac{1-c_{12}(s+a_1)}{s+a_1-a_1[1-c_{12}(s+a_1)]\,\pi_1(s)}, \qquad (5.20) $$

для схем 2.1—2.3

$$ {}_3\nu_2(s) = \frac{1-c_{12}(s+a_1[1-\pi_1(s)])}{s+a_1[1-\pi_1(s)]} \qquad (5.21) $$

4) $j=4$.

Для схем 1.1 и 2.1

$$ {}_4h_2(s) = \frac{1-\beta_2(s+a_1)}{s+a_1-a_1[1-\beta_2(s+a_1)]\,\pi_1(s)\,\nu_2(s)}, \qquad (5.22) $$

для схем 1.2 и 2.2

$$ {}_4h_2(s) = \frac{1-\beta_2(s+a_1)}{s+a_1}, \qquad (5.23) $$

для схем 1.3 и 2.3

$$ {}_4h_2(s) = \frac{1-\beta_2(s+a_1[1-\pi_1(s)\,\nu(s)])}{s+a_1[1-\pi_1(s)\,\nu_2(s)]}. \qquad (5.24) $$

Участвующая в п. 1—4 $\nu_2(s)$ для каждой из схем задается соотношениями лемм 1.1—1.3, $\pi_1(s)$ — соотношением (1.30).

Выпишем в том же порядке (сохраняя ту же нумерацию, но добавляя «′») соотношения, из которых следуют приведенные выше формулы.

1′) $j=1$.

Для схем 1.1 и 2.1

$$s_1h_2(s)=\frac{a_1[1-\beta_2(s+a_1)]}{s+a_1}s_1c_{21}(s)+$$
$$+\frac{a_1[1-\beta_2(s+a_1)]}{s+a_1}\pi_1(s)s_1\nu_2(s)+$$
$$+\frac{a_1}{s+a_1}[1-\beta_2(s+a_1)]\pi_1(s)\nu_2(s)s_1h_2(s), \qquad (5.7')$$

для схем 1.2 и 2.2

$$s_1h_2(s)=\frac{a_1}{s+a_1}[1-\beta_2(s+a_1)]s_1c_{21}(s)+$$
$$+\frac{a_1}{s+a_1}[1-\beta_2(s+a_1)]\pi_1(s)s_1\nu_2(s), \qquad (5.8')$$

для схем 1.3 и 2.3

$$s_1h_2(s)=\int_0^\infty[1-B_2(x)]e^{-sx}e^{-a_1[1-\pi_1(s)\nu_2(s)]x}a_1dxs_1c_{21}(s)+$$
$$+\int_0^\infty[1-B_2(x)]e^{-sx}e^{-a_1[1-\pi_1(s)\nu_2(s)]x}a_1dx\pi_1(s)s_1\nu_2(s), \qquad (5.9')$$

для схем 1.1—1.3

$$s_1\nu_2(s)=\frac{a_1}{s+a_1}[1-c_{21}(s+a_1)]s_1c_{21}(s)+$$
$$+\frac{a_1}{s+a_1}[1-c_{21}(s+a_1)]\pi_1(s)s_1\nu_2(s), \qquad (5.10')$$

для схем 2.1—2.3

$$s_1\nu_2(s)=\int_0^\infty[1-C_{12}(x)]e^{-sx}e^{-a_1[1-\pi_1(s)]x}a_1dxs_1c_{21}(s) \qquad (5.11')$$

2′) $j=2$.

Для схем 1.1 и 2.1

$$s_2 h_2(s) = \frac{a_1}{s+a_1}[1-\beta_2(s+a_1)]\, c_{21}(s)\, s_2\bar{\pi}_1(s) +$$

$$+\frac{a_1}{s+a_1}[1-\beta_2(s+a_1)]\, \pi_1(s)\, s_2\nu_2(s) +$$

$$+\frac{a_1}{s+a_1}[1-\beta_2(s+a_1)]\, \pi_1(s)\, \nu_2(s)\, s_2 h_2(s), \quad (5.12')$$

для схем 1.2 и 2.2

$$s_2 h_2(s) = \frac{a_1}{s+a_1}[1-\beta_2(s+a_1)]\, c_{21}(s)\, s_2\bar{\pi}_1(s) +$$

$$+\frac{a_1}{s+a_1}[1-\beta_2(s+a_1)]\, \pi_1(s)\, s_2\nu_2(s), \quad (5.13')$$

для схем 1.3 и 2.3

$$s_2 h_2 = \int_0^\infty [1-B_2(x)]\, e^{-sx} e^{-a_1[1-\pi_1(s)\nu_2(s)]x} \times$$

$$\times\, a_1 dx c_{21}(s)\, s_2\bar{\pi}_1(s) +$$

$$+\int_0^\infty [1-B_2(x)]\, e^{-sx} e^{-a_1[1-\pi_1(s)\nu_2(s)]x} a_1 dx \pi_1(x)\, s_2\nu_2(s),$$

$$(5.14')$$

для схем 1.1—1.3

$$s_2\nu_2(s) = \frac{a_1}{s+a_1}[1-c_{12}(s+a_1)]\, c_{21}(s)\, s_2\bar{\pi}_1(s) +$$

$$+\frac{a_1}{s+a_1}[1-c_{12}(s+a_1)]\, \pi_1(s)\, s_2\nu_2(s), \quad (5.15')$$

для схем 2.1—2.3

$$s_2\nu_2(s) = \int_0^\infty [1-C_{12}(x)]\, e^{-sx} e^{-a_1[1-\pi_1(s)]x} \times$$

$$\times\, a_1 dx c_{21}(s)\, s_2\bar{\pi}_1(s). \quad (5.16')$$

5*

3′). $j=3$.

Для схем 1.1 и 2.1

$$s_3h_3(s)=\frac{a_1}{s+a_1}[1-\beta_2(s+a_1)]\pi_1(s)s_3\nu_2(s)+$$

$$+\frac{a_1}{s+a_1}[1-\beta_2(s+a_1)]\pi_1(s)\nu_2(s)s_3h_2(s), \quad (5.17')$$

для схем 1.2 и 2.2

$$s_3h_2(s)=\frac{a_1}{s+a_1}[1-\beta_2(s+a_1)]\pi_1(s)s_3\nu_2(s), \quad (5.18')$$

для схем 1.3 и 2.3

$$s_3h_2(s)=\int_0^\infty[1-B_2(x)]e^{-sx}e^{-a_1[1-\pi_1(s)\nu_2(s)]x}\times$$

$$\times a_1dx\pi_1(s)s_3\nu_2(s), \quad (5.19')$$

для схем 1.1—1.3

$$s_3\nu_2(s)=\int_0^\infty e^{-a_1x}[1-C_{12}(x)]se^{-sx}dx+$$

$$+\int_0^\infty e^{-sx}[1-C_{12}(x)]a_1e^{-a_1x}dx\pi_1(s)s_3\nu_2(s), \quad (5.20')$$

для схем 2.1—2.3

$$s_3\nu_2(s)=\int_0^\infty[1-C_{12}(x)]e^{-a_1[1-\pi_1(s)]x}se^{-sx}dx. \quad (5.21')$$

4′) $j=4$.

Для схем 1.1 и 2.1

$$s_4h_2(s)=\int_0^\infty[1-B_2(x)]e^{-a_1x}se^{-sx}dx+$$

$$+\int_0^\infty e^{-sx}[1-B_2(x)]a_1e^{-a_1x}dx\pi_1(s)\nu_2(s)s_4h_2(s), \quad (5.22')$$

для схем 1.2 и 2.2

$$s_4h_2(s)=\int_0^\infty[1-B_2(x)]e^{-a_1x}se^{-sx}dx, \quad (5.23')$$

для схем 1.3 и 2.3

$$s_4 h_2(s) = \int_0^\infty [1 - B_2(x)]\, e^{-a_1[1-\pi_1(s)\nu_2(s)]x}\, s e^{-sx}\, dx. \quad (5.24')$$

Докажем, например, соотношение (5.14′). Воспользуемся определением «$\Pi_1 N_2$-хорошего» («$\Pi_1 N_2$-плохого») прерывающего a_1-вызова, введенным при доказательстве леммы 1.7. Пусть x — время, отсчитываемое только тогда, когда происходит обслуживание a_2-вызова, и пусть первая «катастрофа» произошла на отдельном цикле обслуживания в момент, когда прибор занят обслуживанием a_1-вызова $<s_2 h_2(s)>$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы либо в промежутке $[x, x+dx)$, когда обслуживание a_2-вызова еще не завершено $<1-B_2(x)>$, поступил a_1-вызов $<a_1 dx>$, до момента x не происходили «катастрофы» $<e^{-sx}>$, поступали разве лишь «$\Pi_1 N_2$-хорошие» прерывающие вызовы $\langle e^{-a_1[1-\pi_1(s)\nu_2(s)]x}\rangle$, за последовавшую затем длительность ориентации (2→1) не произошло «катастрофы» $<c_{21}(s)>$ и первая «катастрофа» произошла на отдельном Π_1-периоде в момент, когда прибор занят обслуживанием a_1-вызова $<s_2\pi_1(s)>$;

либо в промежутке $[x, x+dx)$, когда обслуживание a_2-вызова не завершено $<1-B_2(x)>$, поступил a_1-вызов $<a_1 dx>$, до момента x не происходили «катастрофы» $<e^{-sx}>$, поступали разве лишь «$\Pi_1 N_2$-хорошие» прерывающие вызовы $\langle e^{-a_1[1-\pi_1(s)\nu_2(s)]x}\rangle$, за последовавший затем Π_1-период не произошло «катастрофы» $<\pi_1(s)>$ и первая «катастрофа» произошла на отдельном цикле ориентации в момент, когда прибор занят обслуживанием a_1-вызова $<s_2\nu_2(s)>$;

Остальные соотношения доказываются аналогичными рассуждениями. Соотношения (5.17)—(5.24) следуют непосредственно из (5.17′)—(5.24′). Для получения (5.7)—(5.16) осталось воспользоваться тем, что $s_1 c_{21}(s) = 1 - c_{21}(s)$ и соотношением (5.4).

§ 5

ВЕРОЯТНОСТИ СОСТОЯНИЯ ПРИБОРА ДЛЯ СИСТЕМ С РЕЖИМОМ ОРИЕНТАЦИИ «СБРОС В НУЛЬ»

Теорема 5.1. *Для схем 1.1—1.3 и 2.1—2.3 с режимом ориентации «сброс в нуль» преобразование Лапласа вероятностей* $\mathcal{P}_j(t)$ *нахождения прибора в состоянии* j ($j=1,4$) *задается соотношением*

$$p_j(s) = \sigma_j\pi(s)/(\sigma + s - \sigma\pi(s)), \qquad (5.25)$$

где

$$\sigma_j\pi(s) = \Omega_j + \frac{{}_jh_2(s)}{1-h_2(s)}\{\gamma(s)\nu_2(s) + a_1\pi_1(s+a_2) - \sigma\pi(s)\}, \qquad (5.26)$$

$$\Omega_j = \begin{cases} a_1s^{-1}[1-c_{21}(s)] + \gamma(s)\,{}_1\nu_2(s) & \text{при } j=1; \\ a_1s^{-1}[c_{21}(s) - \pi_1(s)] + \gamma(s)\,{}_2\nu_2(s) & \text{при } j=2; \\ \gamma(s)\,{}_3\nu_2(s) & \text{при } j=3; \\ 0 & \text{при } j=4; \end{cases} \qquad (5.27)$$

$$\gamma(s) = a_1[\pi_1(s) - \pi_1(s+a_2)] + a_2; \qquad (5.28)$$

${}_jh_2(s)$ и ${}_j\nu_2(s)$ *даются соотношениями (5.7)—(5.24);* $\nu_2(s)$ *и* $h_2(s)$ *— леммами 1.1, 1.2 и 1.5—1.7;* $\pi(s)$ и $\pi_1(s)$ *— (1.27) и (1.30).*

Доказательство. ◐ Соотношение (5.25) следует из выражения

$$sp_j(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{-\sigma t}\sigma\, dts_j\pi(s) + \int_0^\infty e^{-st}e^{-\sigma t}\sigma dt\pi(s)\, sp_j(s),$$

которое доказывается следующим образом. Пусть первая «катастрофа» произошла в момент, когда прибор находится в состоянии $j <sp_j(s)>$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

либо до момента поступления какого-либо вызова в свободную систему не произошло «катастрофы» $\left(\frac{\sigma}{s+\sigma}\right)$, и первая «катастрофа» наступила на отдельном периоде занятости в момент, когда прибор находится в состоянии $j <s_j\pi(s)>$;

либо до момента поступления какого-либо вызова не произошло «катастрофы» $\left\langle\frac{\sigma}{\sigma+s}\right\rangle$, не произошло «катастрофы» также за последовавший затем период занятости $<\pi(s)>$ и первая «катастрофа» произошла в момент (отсчитываемый от конца первого периода регенерации), когда прибор находится в состоянии j $<sp_j(s)>$. Получим (5.26). Исходя из вероятностного смысла $s_j\pi(s)$ ($s_j\pi(s)$ есть вероятность того, что первая «катастрофа» произошла на отдельном периоде занятости в момент, когда прибор находится в состоянии j), можно написать следующие соотношения:

$$s_1\pi(s)=\frac{a_1}{\sigma}s_1c_{21}(s)+$$

$$+\frac{a_1}{\sigma}\sum_{n\geqslant 1}\int_0^{\infty}e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,d\Pi_1(t)\,s_1\nu_2(s)+$$

$$+\frac{a_1}{\sigma}\sum_{n\geqslant 1}\int_0^{\infty}e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,d\Pi_1(t)\times$$

$$\times\sum_{m\geqslant 1}\int_0^{\infty}e^{-st}\frac{(a_2t)^m}{m!}e^{-a_2t}\,dN_2(t)\,s_1\overline{\pi}_2^{(n+m-1)}(s)+$$

$$+\frac{a_2}{\sigma}s_1\nu_2(s)+\frac{a_2}{\sigma}\sum s_1\overline{\pi}_2^{(n+1)}(s)\,e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,dN_2(t);\tag{5.29}$$

$$s_2\pi(s)=\frac{a_1}{\sigma}\sum_{n\geqslant 0}s_2\overline{\pi}_1^{(n+1)}(s)\int_0^{\infty}e^{-st}\frac{(a_1t)^n}{n!}e^{-a_1t}\,dC_{21}(t)+$$

$$+\frac{a_1}{\sigma}\sum_{n\geqslant 1}\int_0^{\infty}e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,d\Pi_1(t)\,s_2\nu_2(s)+$$

$$+\frac{a_1}{\sigma}\sum\int_0^{\infty}e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,d\Pi_1(t)\times$$

$$\times \sum_{m \geqslant 0} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^m}{m!} e^{-a_2 t} dN_2(t)\, s_2 \bar{\pi}_2^{(n+m)}(s) +$$

$$+ \frac{a_2}{\sigma} s_2 \nu_2(s) + \sum_{n \geqslant 0} s_2 \bar{\pi}_2^{(n+1)}(s) \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t} dN_2(t); \quad (5.30)$$

$$s_3 \pi(s) = \frac{a_1}{\sigma} \sum_{n \geqslant 1} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t} d\Pi_1(t)\, s_3 \nu_2(s) +$$

$$+ \frac{a_1}{\sigma} \sum_{n \geqslant 1} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t} d\Pi_1(t) \times$$

$$\times \sum_{m \geqslant 0} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^m}{m!} dN_2(t)\, s_3 \bar{\pi}_2^{(n+m)}(s) +$$

$$+ \frac{a_2}{\sigma} s_3 \nu_2(s) + \frac{a_2}{\sigma} \sum_{n \geqslant 0} s_3 \bar{\pi}_2(s) \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t} dN_2(t); \quad (5.31)$$

$$s_4 \pi(s) = \frac{a_1}{\sigma} \sum_{n \geqslant 0} e^{-st} \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t} d\Pi_1(t) \times$$

$$\times \sum_{m \geqslant 0} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^m}{m!} e^{-a_2 t} dN_2(t)\, s_4 \bar{\pi}_2^{(n+m)}(s) +$$

$$+ \frac{a_2}{\sigma} \sum_{n \geqslant 0} s_4 \bar{\pi}_2^{(n+1)}(s) \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t} dN_2(t). \quad (5.32)$$

Ограничимся доказательством последнего соотношения. Для того чтобы первая «катастрофа» произошла на отдельном периоде занятости в момент, когда прибор занят обслуживанием a_2-вызова $< s_4\pi(s) >$, необходимо и достаточно, чтобы

либо период занятости открылся a_1-вызовом $< a_1/\sigma >$, за длительность Π_1-периода $< d\Pi_1(t) >$

не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, поступило $n\geqslant 1$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2t)^n}{n!} e^{-a_2t} \right\rangle$, за длительность последовавшего затем цикла ориентации $<dN_2(t)>$ также не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, поступило m a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2t)^m}{m!} e^{-a_2t} \right\rangle$ и первая «катастрофа» произошла на отдельном $\overline{\Pi}_2^{(m+n)}$-периоде в момент, когда прибор занят обслуживанием a_2-вызова $\langle s_4\overline{\pi}_2^{(n+m)}(s)\rangle$;

либо период занятости открылся a_2-вызовом $<a_2/\sigma>$, за длительность цикла ориентации $<dN_2(t)$ не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, поступило n a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2t)^n}{n!} e^{-a_2t} \right\rangle$ и первая «катастрофа» произошла на отдельном $\overline{\Pi}_2^{(n+1)}$-периоде в момент, когда прибор занят обслуживанием a_2-вызова $\langle s_4\overline{\pi}_2^{(n+1)}(s)\rangle$.

Остальные соотношения доказываются аналогичными рассуждениями. Подставляя в (5.29) — (5.32) там где нужно, соотношения для $s_j\overline{\pi}_2^{(k)}(s)$ ($k=m+n$, $n+1$; $j=1,4$) и $s_2\overline{\pi}_1^{(n+1)}(s)$ заданные леммами 5.1 и 5.2, произведя суммирование, интегрирование и переходя к обозначениям (5.27) и (5.28), получаем (5.26). ◐

§ 6

ВЕРОЯТНОСТИ СОСТОЯНИЯ ПРИБОРА НА ОТДЕЛЬНОМ Φ_1-ПЕРИОДЕ

Цель настоящего параграфа — получить $_j\varphi_1(s)$-преобразование Лапласа вероятностей $_j\Phi_1(t)$ нахождения прибора в состоянии j ($j=\overline{1,4}$) в любой момент времени отдельно взятого Φ_1-периода. Эти результаты нам потребуются в следующем параграфе при получении $p_j(s)$ для систем с режимом ориентации «смотри вперед». Они могут представлять и самостоятельный интерес.

Лемма 5.3. *Преобразование Лапласа вероятностей j ($j=\overline{1,4}$) состояния прибора в любой мо-*

мент времени отдельного Φ_1-периода определяется из выражения.

$$
{}_j\varphi_1(s) = \left\{D_j + \frac{{}_jh_2(s)}{1-h_2(s)}\left[\nu_2(s)\lambda(s) - g_2(s)\right]\right\}\left[1-g_2(s)\right]^{-1}, \qquad (5.33)
$$

где

$$
D_j = \begin{cases} 1 - c_{21}(s) + {}_1\nu_2(s)\lambda(s) & \text{при } j=1 \quad (5.34) \\ c_{21}(s) - c_{21}(s + a_1 - a_1\bar{\pi}_1(s) + {}_2\nu_2(s)\lambda(s) & \text{при } j=2 \quad (5.35) \\ {}_3\nu_2(s) & \text{при } j=3 \quad (5.36) \\ 0 & \text{при } j=4, \end{cases}
$$

$$
\lambda(s) = c_{21}(s + a_1 - a_1\bar{\pi}(s)) - c_{21}(s + \sigma - a_1\bar{\pi}_1(s + a_2)), \qquad (5.37)
$$

$$
g_2(s) = \{c_{21}(s + \sigma - a_2\bar{\pi}_2(s) - a_1\bar{\pi}_1(s + a_2\bar{\pi}_1(s) + a_2[1 - \bar{\pi}_2(s)]) - c_{21}(s + \sigma - a_1\bar{\pi}_1(s + a_2))\} \times \times \nu(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2(s)]); \qquad (5.38)
$$

функции ${}_jh_2(s)$ $(j=\overline{1,4})$ и ${}_j\nu_2(s)$ $(j=1, 2, 3)$ для каждой из схем и фиксированного j выражаются соотношениями (5.7)—(5.24); $\nu_2(s)$ и $h_2(s)$ из соотношений лемм 1.1, 1.2 и лемм 1.5—1.7; $\pi_1(s)$, $\bar{\pi}_2(s)$ и $\pi_1(s)$ — из (1.30)—(1.32).

Доказательство. ◑ Учитывая вероятностный смысл $s_j\varphi_1(s)$ ($s_j\varphi_1(s)$ есть вероятность того, что первая «катастрофа» произошла на отдельном Φ_1-периоде в момент, когда прибор находится в состоянии j $(j=\overline{1,4})$ и строение Φ_1-периода, можно получить следующие соотношения:

$$
s_1\varphi_1(s) = \int_0^\infty [1 - C_{21}(t)]\, e^{-st} s\,dt + \sum_{n\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,d\hat{\Pi}(t)\, s_1\nu_2(s) +
$$

$$+\sum_{n\geq 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,d\widehat{\Pi}(t)\times$$

$$\times\sum_{m\geq 0}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^m}{m!}e^{-a_2t}\,dN_2(t)\,s_1\overline{\pi}_2^{(n+m)}(s)+$$

$$+\sum_{n\geq 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,d\widehat{\Pi}(t)\times$$

$$\times\sum_{m>0}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^m}{m!}e^{-a_2t}\,dN_2(t)\,\overline{\pi}_2^{(n+m)}(s)\,s_1\varphi_1(s)+$$

$$+\sum_{n\geq 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}e^{-a_1t}\,dC_{21}(t)\,s_1\nu_2(s)+$$

$$+\sum_{n\geq 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}e^{-a_1t}\,dC_{21}(t)\times$$

$$\times\sum_{m\geq 0}s_1\overline{\pi}_2^{(n+m)}(s)\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^m}{m!}e^{-a_2t}\,dN_2(t)+$$

$$+\sum_{n\geq 0}\int_0^\infty\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}e^{-a_1t}\,dC_{21}(t)\times$$

$$\times\sum_{m\geq 0}\overline{\pi}_2^{(n+m)}(s)\frac{(a_2t)^m}{m!}e^{-a_2t}\,dN_2(t)\,s_1\varphi_1(s);\quad(5.39)$$

$$s_2\varphi_1(s)=\sum_{n\geq 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,d\widehat{\Pi}(t)\,s_2\tilde{\nu}_2(s)+$$

$$+\sum_{n\geq 1}s_2\overline{\pi}_1^{(n)}(s)\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_1t)^n}{n!}e^{-a_1t}\,dC_{21}(t)+$$

$$+\sum_{n>1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,d\widehat{\Pi}(t)\sum_{m\geq 0}s_2\overline{\pi}_2^{(n+m)}(s)\times$$

$$\times \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2t)^m}{m!} e^{-a_2t}\, dN_2(t) + \sum_{n\geqslant 1} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2t)^n}{n!} \times$$

$$\times e^{-a_2t}\, d\widehat{\Pi}(t) \sum_{m\geqslant 0} \overline{\pi}_2^{(n+m)}(s) \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2t)^m}{m!}\, dN_2(t)\; s_2\varphi_1(s) +$$

$$+ \sum_{n\geqslant 1} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2t)^n}{n!} e^{-a_2t} e^{-a_1t}\, dC_{21}(t)\, s_2\nu_2(s) +$$

$$+ \sum_{n\geqslant 1} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2t)^n}{n!} e^{-a_2t} e^{-a_1t}\, dC_{21}(t) \sum_{m\geqslant 0} s_2\overline{\pi}_2^{(n+m)}(s) \times$$

$$\times \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2t)^m}{m!}\, dN_2(t) +$$

$$+ \sum_{n\geqslant 1} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2t)^n}{n!} e^{-a_2t} e^{-a_1t}\, dC_{21}(t) \times$$

$$\times \sum_{m\geqslant 0} \overline{\pi}_2^{(n+m)}(s) \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2t)^m}{m!} e^{-a_2t}\, dN_2(t)\, s_2\varphi_1(s); \quad (5.40)$$

$$s_3\varphi_1(s) = \sum_{n\geqslant 1} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2t)^n}{n!} e^{-a_2t}\, d\widehat{\Pi}(t)\, s_3\nu_2(s) +$$

$$+ \sum_{n\geqslant 1} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2t)^n}{n!} e^{-a_2t}\, d\widehat{\Pi}(t) \times$$

$$\times \sum_{n\geqslant 0} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2t)^n}{n!} e^{-a_2t}\, d\widehat{\Pi}(t) \times$$

$$\times \sum_{m\geqslant 0} s_3\overline{\pi}_2^{(n+m)}(s) \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2t)^m}{m!} e^{-a_2t}\, dN_2(t) +$$

$$+\sum_{n\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,d\hat{\Pi}(t)\times$$

$$\times\sum_{m\geqslant 0}\bar{\pi}_2^{(n+m)}(s)\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^m}{m!}e^{-a_2t}\,dN_2(t)\,s_3\varphi_1(s)+$$

$$+\sum_{n\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}e^{-a_1t}\,dC_{21}(t)\,s_3\nu_2(s)+$$

$$+\sum_{n\geqslant 0}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}e^{-a_1t}\,dC_{21}(t)\times$$

$$\times\sum_{m\geqslant 0}s_3\bar{\pi}_2^{(n+m)}(s)\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^m}{m!}e^{-a_2t}\,dN_2(t)+$$

$$+\sum_{n\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}e^{-a_1t}\,dC_{21}(t)\times$$

$$\times\sum_{m\geqslant 0}\bar{\pi}_2^{(n+m)}(s)\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^m}{m!}e^{-a_2t}\,dN_2(t)\,s_3\varphi_1(s); \tag{5.41}$$

$$s_4\varphi_1(s)=\sum_{n\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,d\hat{\Pi}(t)\times$$

$$\times\sum_{m\geqslant 0}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^m}{m!}e^{-a_2t}\,dN_2(t)\,s_4\bar{\pi}_2^{(n+m)}(s)+$$

$$+\sum_{n\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,d\hat{\Pi}(t)\times$$

$$\times\sum_{m\geqslant 0}\bar{\pi}_2^{(n+m)}(s)\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^m}{m!}e^{-a_2t}\,dN_2(t)\,s_4\varphi_1(s)+$$

$$+\sum_{n\leqslant 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}e^{-a_1t}\,dC_{21}(t)\times$$

$$\times\sum_{m\geqslant 0}s_4\pi_2^{(n+m)}(s)\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^m}{m!}\,dN_2(t)+$$

$$+\sum_{n\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}e^{-a_1t}\,dC_{21}(t)\times$$

$$\times\sum_{m\geqslant 0}\bar{\pi}_2^{(n+m)}(s)\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^m}{m!}e^{-a_2t}\,dN_2(t)\,s_4\varphi(s). \tag{5.42}$$

Докажем, например, соотношение (5.42). Пусть первая «катастрофа» произошла на отдельном Φ_1-периоде в момент, когда происходит обслуживание a_2-вызова $<s_4\varphi_1(s)>$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

либо за длительность промежутка $\hat{\Pi}<d\hat{\Pi}(t)>$ не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, поступило $n\geqslant 1$ a_2-вызовов $\left\langle\frac{(a_2t)^n}{n!}\right\rangle$, за длительность цикла ориентации $dN_2(t)$ не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, поступило $m\geqslant 0$ a_2-вызовов $\left\langle\frac{(a_2t)^m}{m!}e^{-a_2t}\right\rangle$ и первая «катастрофа» наступила на отдельном $\bar{\Pi}_2^{(n+m)}$ -периоде в момент, когда обслуживается a_2-вызов $\langle s_4\bar{\pi}_2^{(n+m)}(s)\rangle$;

либо за длительность промежутка $\hat{\Pi}<d\hat{\Pi}(t)>$ не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, поступило $n\geqslant 1$ a_2-вызовов $\left\langle\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\right\rangle$, за длительность цикла ориентации $dN_2(t)$ не произошло «катастрофы» $<e^{-st}>$, поступило $m\geqslant 0$ a_2-вызовов потока $\left\langle\frac{(a_2t)^m}{m!}e^{-a_2t}\right\rangle$, не произошло «катастрофы» за $\bar{\Pi}_2^{(n+m)}$ -период $\langle\bar{\pi}_2^{(n+m)}(s)\rangle$ и первая «катастрофа» произошла на начавшемся заново Φ_1-периоде в момент обслуживания a_2-вызова $<s_4\varphi_1(s)>$;

либо за длительность ориентации (2→1) $\langle dC_{21}(t)$ не произошло «катастрофы» $\langle e^{-st}\rangle$ и не поступали a_1-вызовы $\langle e^{-a_1t}\rangle$, поступило $n\geqslant 1$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2t)^n}{n!} e^{-a_2t}\right\rangle$, за длительности цикла ориентации $\langle dN_2(t)\rangle$ не произошло «катастрофы» $\langle e^{-st}\rangle$, поступило $m\geqslant 0$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2t)^m}{m!} e^{-a_2t}\right\rangle$ и первая «катастрофа» произошла на отдельном $\Pi_2^{(n+m)}$ -периоде в момент, когда прибор обслуживает a_2-вызов $\langle s_4\bar{\pi}_2^{(n+m)}(s)\rangle$;

либо за длительности ориентации (2→1) $\langle dC_2(t)\rangle$ не произошло «катастрофы» $\langle e^{-st}\rangle$ и не поступали a_1-вызовы $\langle e^{-a_1t}\rangle$, поступило $n\geqslant 1$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2t)^m}{m!} e^{-a_2t}\right\rangle$, за длительности цикла ориентации $\langle dN_2(t)\rangle$ не произошло «катастрофы» $\langle e^{-st}\rangle$, поступило $m\geqslant 0$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2t)^m}{m!} e^{-a_2t}\right\rangle$, за последовавший затем $\Pi_2^{(n+m)}$ - промежуток не произошло «катастрофы» $\langle\bar{\pi}_2^{(n+m)}(s)\rangle$ и первая «катастрофа» произошла на начавшемся заново Φ_1-периоде в момент обслуживания a_2-вызова $\langle s_4\varphi_1(s)\rangle$.

Вероятности $s_j\bar{\pi}_2^{(n+m)}(s)$ и $s\bar{\pi}_2^{(n)}(s)$ находим, используя леммы 5.1 и 5.2,

$$s_j\bar{\pi}_2^{(n+m)}(s) = \frac{s_jh_2(s)\{1-[\bar{\pi}_2^r(s)]^{n+m}}{1-h_2(s)}, \tag{5.43}$$

$$s_2\bar{\pi}_1^{(n)} = 1 - [\bar{\pi}_1(s)]^n. \tag{5.44}$$

Кроме того, очевидно

$$\bar{\pi}_2^{(n+m)}(s) = [\bar{\pi}_2(s)]^{n+m}. \tag{5.45}$$

Подставляя (5.43)—(5.45) в (5.39)—(5.42), произведя суммирование, затем интегрирование, воспользовавшись (там, где необходимо) соотношением (1.37) и переходя к обозначениям (5.34)—(5.38), получаем (5.33). ◐

§ 7
ВЕРОЯТНОСТИ СОСТОЯНИЯ ПРИБОРА ДЛЯ СИСТЕМ С РЕЖИМОМ ОРИЕНТАЦИИ «СМОТРИ ВПЕРЕД»

Теорема 5.2. *Преобразование Лапласа вероятностей $\mathcal{P}_j(t)$ состояния прибора в любой момент времени для рассматриваемых схем режима «смотри вперед» определяется из нижеследующих соотношений*

$$p_j(s) = \frac{\sigma_j \pi(s)}{s + \sigma - \sigma\pi(s)}, \tag{5.46}$$

$$\sigma_j \pi(s) = W_j + v(s)_j \varphi_1(s) + \frac{{}_j h_2(s)}{1 - h_2(s)} [\bar{\gamma}(s) \nu_2(s) - v(s)], \tag{5.47}$$

где

$$W_j = \begin{cases} [a_1 \bar{\pi}_1(s) + a_2]_1 \nu_2(s) & \text{при } j = 1; \\ a_1 [1 - \bar{\pi}_1(s)] + [a_1 \bar{\pi}_1(s) + a_2]_2 \nu_2(s) & \text{при } j = 2; \\ [a_1 \bar{\pi}_1(s) + a_2]_3 \nu_2(s) & \text{при } j = 3; \\ 0 & \text{при } j = 4. \end{cases} \tag{5.48}$$

$$\bar{\gamma}(s) = a_1 [\bar{\pi}_1(s) - \bar{\pi}_1(s + a_2)] + a_2, \tag{5.49}$$

$$v(s) = \{a_1 [\bar{\pi}_1(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2(s)]) - \bar{\pi}_1(s + a_2)] + \\ + a_2 \bar{\pi}_2(s)\} \nu_2(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2(s)]), \tag{5.50}$$

фигурирующие выше ${}_j h_2(s)$ и ${}_j \nu_2(s)$ *определяются из (5.7)—(5.24),* $\pi(s)$, $\bar{\pi}_1(s)$ *и* $\bar{\pi}_2(s)$ *— из соответствующих выражений теоремы 1.2,* $a_j \varphi_1(s)$ *задается леммой 5.3.*

Доказательство. ◑ Соотношение (5.46) совпадает с (5.25). Можно убедиться, далее, что имеют место равенства, аналогичные равенствам (5.29)—(5.32):

$$s_1 \pi(s) = \frac{a_1}{\sigma} \sum_{n \geqslant 0} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t} d\bar{\Pi}_1(t) s_1 \nu_2(s) +$$

$$+\frac{a_1}{\sigma}\sum_{n\geqslant 0}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,d\overline{\Pi}_1(t)\times$$

$$\times\sum_{m\geqslant 0}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^m}{m!}e^{-a_1t}\,dN_2(t)\,s_1\,\overline{\pi}_2^{(n+m)}(s)+$$

$$+\frac{a_1}{\sigma}\sum_{m\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,d\overline{\Pi}_1(t)\times$$

$$\times\sum_{m\geqslant 0}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^m}{m!}e^{-a_2t}\,dN_2(t)\,\overline{\pi}_2^{(n+m)}(s)\,s_1\varphi_1(s)+$$

$$+\frac{a_2}{\sigma}s_1\,\nu_2(s)+$$

$$+\frac{a_2}{\sigma}\sum_{n\geqslant 0}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,dN_2(t)\,s_1\,\overline{\pi}_2^{(n+m)}(s)+$$

$$+\frac{a_2}{\sigma}\sum\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,dN_2(t)\,\overline{\pi}_2^{(n+1)}(s)\,s_1\,\varphi_1(s);$$

$$s_2\,\pi(s)=\frac{a_1}{\sigma}s_2\,\overline{\pi}_1(s)+$$

$$+\frac{a_1}{\sigma}\sum_{n\geqslant 0}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,d\overline{\Pi}_1(t)\,s_2\,\nu_2(s)+$$

$$+\frac{a_1}{\sigma}\sum_{n\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,d\overline{\Pi}_1(t)\times$$

$$\times\sum_{m\geqslant 0}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^m}{m!}e^{-a_2t}\,dN_2(t)\,s_2\,\overline{\pi}_2^{(n+m)}(s)+$$

$$+\frac{a_1}{\sigma}\sum_{n\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,d\overline{\Pi}_1(t)\times$$

$$\times \sum_{m\geqslant 0}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^m}{m!}e^{-a_2t}\,dN_2(t)\,\overline{\pi}_2^{(n+m)}(s)\,s_2\,\varphi_1(s)+$$

$$+\frac{a_2}{\sigma}s_2\,\nu_2(s)+\frac{a_2}{\sigma}\sum_{n\geqslant 0}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}\times$$

$$\times e^{-a_2t}\,dN_2(t)\,s_2\,\overline{\pi}_2^{(n+1)}(s)+$$

$$+\frac{a_2}{\sigma}\sum_{n\geqslant 0}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,dN_2(t)\,\overline{\pi}_2^{(n+1)}(s)\,s_2\,\varphi_1(s);$$

$$s_3\,\pi(s)=\frac{a_1}{\sigma}\sum_{n\geqslant 0}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,d\overline{\Pi}_1(t)\,s_3\,\nu_2(s)+$$

$$+\frac{a_1}{\sigma}\sum_{n\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,d\overline{\Pi}_1(t)\times$$

$$\times\sum_{m\geqslant 0}s_3\,\overline{\pi}_2^{(n+m)}(s)\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^m}{m!}e^{-a_2t}\,dN_2(t)+$$

$$+\frac{a_1}{\sigma}\sum_{n\geqslant 0}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,d\overline{\Pi}_1(t)\sum_{m\geqslant 0}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^m}{m!}\times$$

$$\times e^{-a_2t}\,dN_2(t)\,\overline{\pi}_2^{(n+m)}(s)\,s_3\,\varphi_1(s)+\frac{a_2}{\sigma}s_3\,\nu_2(s)+$$

$$+\frac{a_2}{\sigma}\sum_{n\geqslant 0}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,dN_2(t)\,s_3\,\overline{\pi}_2^{(n+1)}(s)+$$

$$+\frac{a_2}{\sigma}\sum_{n\geqslant 0}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,dN_2(t)\,\overline{\pi}_2^{(n+1)}(s)\,s_3\,\varphi_1(s);$$

$$s_4\,\pi(s)=\frac{a_1}{\sigma}\sum_{n\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_2t)^n}{n!}e^{-a_2t}\,d\overline{\Pi}_1(t)\times$$

$$\times \sum_{m\geq 0} s_4 \bar{\pi}_2^{(n+m)}(s) \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^m}{m!} e^{-a_2 t}\, dN_2(t) +$$

$$+ \frac{a_1}{\sigma} \sum_{n\geq 1} e^{-st} \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t}\, d\overline{\Pi}_1(t) \times$$

$$\times \sum_{m\geq 0} \bar{\pi}_2^{(n+m)}(s) \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^m}{m!} e^{-a_2 t}\, dN_2(t)\, s_4 \varphi_1(s) +$$

$$+ \frac{a_2}{\sigma} \sum_{n\geq 0} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t}\, dN_2(t)\, s_4 \bar{\pi}_2^{(n+1)}(s) +$$

$$+ \frac{a_2}{\sigma} \sum_{n\geq 0} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t}\, dN_2(t)\, \bar{\pi}_2^{(n+1)}(s)\, s_4 \varphi_1(s).$$

Так же, как и при доказательстве теоремы 5.1, ограничимся доказательством последнего соотношения. Для того чтобы первая «катастрофа» произошла на отдельном периоде занятости в момент обслуживания a_2-вызова $\langle s_4\pi(s)\rangle$, необходимо и достаточно, чтобы

либо период занятости начинался обслуживанием a_1-вызова $\langle a_1/\sigma\rangle$, за длительность $\overline{\Pi}_1$-периода $\langle d\overline{\Pi}_1(t)\rangle$ не произошло «катастрофы» $\langle e^{-st}\rangle$, поступило $n\geq 1$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t}\right\rangle$, за длительности цикла ориентации $\langle dN_2(t)\rangle$ не произошло «катастрофы» $\langle e^{-st}\rangle$, поступило $m\geq 0$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2 t)^m}{m!} e^{-a_2 t}\right\rangle$ и первая «катастрофа» произошла на $\overline{\Pi}_2^{(n)}$ -периоде в момент обслуживания a_2-вызова $\langle s_4\bar{\pi}_2^{(n+m)}(s)\rangle$;

либо период занятости начинался обслуживанием a_1-вызова $\left\langle \frac{a_1}{\sigma}\right\rangle$, за длительность $\overline{\Pi}_1$-периода $\langle d\overline{\Pi}_1(t)\rangle$ не произошло «катастрофы» $\langle e^{-st}\rangle$, поступило $n\geq 1$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2 t)^n}{n!} e^{-a_2 t}\right\rangle$, за длительности цикла ориентации $\langle dN_2(t)\rangle$ не про-

изошло «катастрофы» $\langle e^{-st} \rangle$, поступило $n \geqslant 1$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2t)^n}{n!} e^{-a_2t} \right\rangle$, за длительности цикла ориентации $\langle dN_2(t) \rangle$ не произошло «катастрофы» $\langle e^{-st} \rangle$, поступило $m \geqslant 0$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2t)^m}{m!} e^{-a_2t} \right\rangle$, за длительность Π_2^{n+m}-периода не произошло «катастрофы» $\langle \pi_2^{n+m}(s) \rangle$ и первая «катастрофа» произошла на отдельном Φ_1-периоде в момент обслуживания a_2-вызова $\langle s_4 \varphi_1(s) \rangle$;

либо период занятости начинался обслуживанием a_2-вызова $\left\langle \frac{a_2}{\sigma} \right\rangle$, за длительности цикла ориентации $\langle dN_2(t) \rangle$ не произошло «катастрофы» $\langle e^{-st} \rangle$, за это время поступило $n \geqslant 0$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2t)^n}{n!} e^{-a_2t} \right\rangle$ и первая «катастрофа» произошла на отдельном $\overline{\Pi}_2^{(n+1)}$ периоде в момент обслуживания a_2-вызова $\langle s_4 \overline{\pi}_2^{(n+1)}(s) \rangle$;

либо период занятости начинался обслуживанием a_2-вызова $\left\langle \frac{a_2}{\sigma} \right\rangle$, за длительности цикла ориентации $\langle dN_2(t) \rangle$ не произошло «катастрофы» $\langle e^{-st} \rangle$, за это время поступило $n \geqslant 0$ a_2-вызовов $\left\langle \frac{(a_2t)^n}{n!} e^{-a_2t} \right\rangle$, за последовавший затем $\overline{\Pi}_2^{(n+1)}$-период не произошло «катастрофы» $\langle \overline{\pi}_2^{(n+1)}(s) \rangle$ и первая «катастрофа» произошла на отдельном Φ_1-периоде в момент обслуживания a_2-вызова $\langle s_4 \varphi_1(s) \rangle$.

Воспользуясь опять соотношениями (5.43)—(5.45), произведя суммирование и интегрирование, затем введя обозначения (5.48)—(5.50), получаем (5.47). ◐

Глава 6

СИСТЕМА $M_r|G_r|1|\infty$ С ОРИЕНТАЦИЕЙ И АБСОЛЮТНЫМ ПРИОРИТЕТОМ

§ 1

ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В однолинейную систему массового обслуживания с ожиданием поступают r независимых пуассоновских потоков вызовов $L_1, ..., L_r$ с параметрами $a_1, ...$ $... a_r$ соответственно. Длительности обслуживания вызовов потока L_k есть сл. в. B_k с ф. р. $B_k(x)$ ($k=\overline{1,r}$). Прибор одновременно может обслужить не более одного вызова, причем, если прибор обслужил вызов потока L_i, то, для того чтобы он мог начать обслуживание вызова потока L_k, $i\neq k$, требуется затратить некоторое время C_k на ориентацию (переналадку) прибора. Длительности ориентации от L_i к L_k ($i=\overline{1, r}$; $i\neq k$) суть сл. в. с ф. р. $C_k(x)$. Сл. в. B_k и C_k независимы в совокупности. Потоки пронумерованы в порядке убывания приоритетов. Приоритет абсолютный. Это означает, что на освободившийся прибор поступает вызов наивысшего приоритета из имеющихся в системе; ориентация к обслуживанию и обслуживание вызова прерываются поступившим вызовом более высокого приоритета, к которому сразу же начинается ориентация на обслуживание. В связи с судьбой прерванного вызова (прерванной ориентации) рассматриваются следующие дисциплины ориентации и обслуживания.

Схема 1.1. а) Если во время ориентации прибора от L_i к L_k, ($\to k$) поступает вызов потока L_j, $j<k$, то ориентация ($\to k$) прерывается и сразу же начинается ориентация ($\to j$). Когда система осво-

бодится от вызовов приоритета выше k, прерванная ориентация ($\to k$) начинается заново (с новой реализацией времени ориентации);

б) если во время обслуживания вызова потока L_k поступает вызов потока L_j, $j<k$, то обслуживание прерывается, сразу начинается ориентация ($\to j$) и, как только она доведена до конца, начинается обслуживание вызова, приведшего к прерыванию. Как только система освободится от вызовов приоритета выше k, начинается ориентация ($\to k$). Когда ориентация ($\to k$) доведена до конца, обслуживание прерванного вызова начинается заново (с новой реализацией времени обслуживания).

Схема 1.2 а) то же, что и а) схемы 1.1;
б) то же, что и б) схемы 1.1, но вызов с прерванным обслуживанием «теряется».

Схема 1.3. а) то же, что и а) схемы 1.1;
б) то же, что и б) схемы 1.1, но вызов с прерванным обслуживанием дообслуживается оставшееся время.

Схема 1.4. а) то же, что и а) схемы 1.1;
б) то же, что и б) схемы 1.1, но обслуживание прерванного вызова начинается заново с прежней реализацией времени обслуживания (идентичное обслуживание заново).

Схема 2.1. а) то же, что и а) схемы 1.1, но прерванная ориентация доориентируется оставшееся время;
б) то же, что и б) схемы 1.1.

Схема 2.2. а) то же, что и а) схемы 2.1;
б) то же, что и б) схемы 1.2.

Схема 2.3. а) то же, что и а) схемы 2.1;
б) то же, что и б) схемы 1.3.

Схема 2.4. а) то же, что и а) схемы 2.1;
б) то же, что и б) схемы 1.4.

Схема 3.1. а) то же, что и а) схемы 1.1, но прерванная ориентация ($\to k$) начинается заново с той же реализацией времени ориентации (иден-

тичная ориентация заново);
б) то же, что и б) схемы 1.1.

Схема 3.2. а) то же, что и а) схемы 3.1;
б) то же, что и б) схемы 1.2.

Схема 3.3. а) то же, что и а) схемы 3.1;
б) то же, что и б) схемы 1.3.

Схема 3.4 а) то же, что и а) схемы 3.1;
б) то же, что и б) схемы 1.4.

Способ ориентации прибора в моменты, когда система свободна от вызовов следующий. Как только прибор оказывается в свободном состоянии (т. е., когда он не занят ни ориентацией, ни обслуживанием), мгновенно «сбрасывается» ориентация. Таким образом, при поступлении в свободную систему вызова любого приоритета, прежде чем прибор приступит к его обслуживанию, необходима ориентация прибора. При этом предполагается, что время ориентации прибора из «нулевого» состояния к обслуживанию вызова потока L_j, $(0 \to j)$ равно времени ориентации $(\to j)$. Ищется совместное распределение числа вызовов каждого приоритета, находящихся в системе в любой момент времени. Предполагается, что в начальный момент система свободна от вызовов.

Попутно, так же, как в гл. 1 и 4, будут получены и другие характеристики системы, такие, как распределение k-циклов ориентации, k-циклов обслуживания, периода занятости, условие стационарности и др.

§ 2

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Как и выше, вызов приоритета k будем называть a_k-вызовом. Приведем основные определения промежутков и введем обозначения, пригодные для всех схем.

k-цикл ориентации. Начинается с момента начала ориентации прибора к обслуживанию a_k-вызова; заканчивается сразу, как только прибор готов приступить к обслуживанию этого вызова. Длительность k-цикла ориентации есть сл. в. N_k с ф. р.

$N_k(x)$, преобразование Л. — С., которой $\nu_k(s)$. k-цикл обслуживания. Начинается с момента начала обслуживания a_k-вызова; заканчивается сразу, как только система освободится от этого вызова. Длительность k-цикла обслуживания есть сл. в. H_k с ф. р. $H_k(x)$, преобразование Л. — С. которой $h_k(s)$.

Π_k-период. Начинается с момента поступления a_i-вызова $i \leqslant k$ в свободную систему; заканчивается сразу, как только система освобождается от a_k-вызовов. Длительность Π_k-периода есть сл. в. Π_k с ф. р. $\Pi_k(x)$, преобразование Л. — С. которой $\pi_k(s)$.

Π_{kk}-период. Начинается с момента поступления a_k-вызова в свободную систему; заканчивается сразу, как только система освобождается от a_k-вызовов. Длительность Π_{kk}-периода есть сл. в. Π_{kk} с ф. р. $\Pi_{kk}(x)$, преобразование Л. — С. которой $\pi_{kk}(s)$.

$\overline{\Pi}_k$-период. Начинается с момента поступления a_k-вызова в свободную от a_i-вызовов $i \leqslant k$ и ориентированную ($\to k$) систему; заканчивается сразу, как только система освобождается от a_k-вызовов. Длительность $\overline{\Pi}_k$-периода есть сл. в. $\overline{\Pi}_k$ с ф. р. $\overline{\Pi}_k(x)$, преобразование Л. — С. которой $\overline{\pi}_k(s)$.

$\overline{\Pi}_k^{(n)}$ **-период.** Начинается с момента первого поступления на прибор одного из n a_k-вызовов, находящихся в системе; заканчивается сразу, как только система освобождается от a_k-вызовов. Длительность $\overline{\Pi}_k^{(n)}$-периода есть сл. в. $\overline{\Pi}_k^{(n)}$ с ф. р. $\overline{\Pi}_k^{(n)}(x)$, преобразование Л. — С. которой $\overline{\pi}_k^{(n)}(s)$.

Период занятости системы. Начинается с момента поступления вызова в свободную систему; заканчивается, как только система вновь свободна от вызовов. Длительность периода занятости есть сл. в. с ф. р. $\Pi(x)$, преобразование Л. — С. которой $\pi(s)$. Ясно, что $\Pi(x) = \Pi_r(x)$.

Ввиду того, что потоки пуассоновские и независимые — суммарный поток вызовов приоритета k и выше, очевидно, также пуассоновский и его параметр есть $\sigma_k = a_1 + \ldots + a_k$ $(\sigma_0 = 0,\ \sigma_r = \sigma)$.

Для интересующих нас величин порядок обслуживания вызовов одного и того же приоритета не играет роли. Для вызовов одного приоритета порядок обслуживания будем считать инверсионным.

§ 3
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ к-ЦИКЛОВ ОРИЕНТАЦИИ И к-ЦИКЛОВ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Для описанной системы справедливы следующие соотношения, выражающие преобразование Л.— С. $\nu_k(s)$ ф. р. длительностей циклов ориентации и преобразование Л.— С. $h_k(s)$ ф. р. длительностей циклов обслуживания.

1.

Для схем 1.1—1.4

$$\nu_k(s) = c_k(s+\sigma_{k-1}\left\{1-\frac{\sigma_{k-1}}{s+\sigma_{k-1}}\times\right.$$
$$\left.\times[1-c_k(s+\sigma_{k-1})]\,\pi_{k-1}(s)\right\}^{-1}, \qquad (6.1)$$

для схем 2.1 — 2.4

$$\nu_k(s) = c_k(s+\sigma_{k-1}[1-\pi_{k-1}(s)]), \qquad (6.2)$$

для схем 3.1 — 3.4

$$\nu_k(s) = (s+\sigma_{k-1})\int_0^\infty \frac{e^{-(s+\sigma_{k-1})\tau}\,dC_k(\tau)}{s+\sigma_{k-1}\{1-\pi_{k-1}(s)[1-e^{-(s+\sigma_{k-1})\tau}]\}}. \qquad (6.3)$$

2. Для схем 1.1, 2.1 и 3.1

$$h_k(s) = \beta_k(s+\sigma_{k-1})\left\{1-\frac{\sigma_{k-1}}{1+\sigma_{k-1}}[1-\beta_k(s+\sigma_{k-1})]\times\right.$$
$$\left.\times\,\pi_{k-1}(s)\,\nu_k(s)\right\}^{-1}, \qquad (6.4)$$

для схем 1.2, 2.2 и 3.2

$$h_k(s) = \beta_k(s+\sigma_{k-1}) + \frac{\sigma_{k-1}}{s+\sigma_{k-1}}[1-\beta_k(s+\sigma_{k-1})]\times$$
$$\times\,\pi_{k-1}(s)\,\nu_k(s), \qquad (6.5)$$

для схем 1.3, 2.3 и 3.3

$$h_k(s) = \beta_k(s + \sigma_{k-1}[1 - \pi_{k-1}(s)\nu_k(s)]), \qquad (6.6)$$

для схем 1.4, 2.4 и 3.4

$$h_k(s) = (s + \sigma_{k-1}) \int_0^\infty \frac{e^{-(s+\sigma_{k-1})u}\, dB_k(u)}{s+\sigma_{k-1}\{1-\pi_{k-1}(s)\nu_k(s)[1-e^{-(s+\sigma_{k-1})u}]\}} \qquad (6.7)$$

Участвующие в п. 6.2 $\nu_k(s)$ для каждой из схем выражаются формулами (6.1)—(6.3), а фигурирующее всюду $\pi_{k-1}(s)$ рекуррентно определяется из нижеследующей теоремы 6.1.

Доказательство выражений (6.1)—(6.7) осуществляется путем естественной модификации приемов, использованных в гл. 1 при получении аналогичных соотношений для двухприоритетных схем. Покажем это на примере схемы 2.1. Можно видеть, что k-цикл обслуживания имеет следующую структуру. Либо за время обслуживания a_k-вызова не поступают a_i-вызовы, $i<k$ и k-цикл обслуживания завершается моментом окончания обслуживания a_k-вызова (концевой промежуток). Либо обслуживание a_k-вызова прерывается поступлением a_i-вызова, $i<k$ (неконцевой промежуток), к которому сразу же начинается ориентация ($\to i$), т. е. начинается Π_{k-1}-период, после его завершения осуществляется k-цикл ориентации, после чего прерванное обслуживание a_k-вызова начинается заново.

Учитывая вышесказанное и то, что суммарный поток a_i-вызовов, $i<k$, является пуассоновским с параметром σ_{k-1}, можно доказать следующее соотношение:

$$h_k(s) = \beta_k(s + \sigma_{k-1}) + \frac{\sigma_{k-1}}{s + \sigma_{k-1}} + \frac{\sigma_{k-1}}{s + \sigma_{k-1}}[1 - \beta_k(s + \sigma_{k-1})]\, \pi_{k-1}(s)\, \nu_k(s)\, h_k(s).$$

Действительно, пусть независимо от функционирования системы происходят «катастрофы», поток которых является пуассоновским с параметром $s>0$, и пусть за длительность k-цикла обслужива-

ния не произошло «катастрофы» $<h_k(s)>$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

либо имел место концевой промежуток обслуживания и за его длительность не произошло «катастрофы» $<\beta_k(s+\sigma_{k-1})>$,

либо за длительность неконцевого промежутка не произошло «катастрофы» $\left\langle \frac{\sigma_{k-1}}{s+\sigma_{k-1}}[1-\beta_k(s+\sigma_{k-1})]\right\rangle$, а также не произошло «катастрофы» за длительности: последовавшего затем Π_{k-1}-периода $<\pi_{k-1}(s)>$, k-цикла ориентации $<\nu_k(s)>$ и за начавшийся заново k-цикл обслуживания $<h_k(s)>$.

Теперь (6.4) следует непосредственно из доказанного соотношения. Надо еще получить для данной схемы выражение для $\nu_k(s)$. Напомним, что согласно схеме 2.1 прерванная ориентация доориентируется. С каждым прерывающим ориентацию $(\to k)$ a_i-вызовом $i<k$ будем связывать свой Π_{k-1}-период. Прерывающий вызов назовем «Π_{k-1}-хорошим» («Π_{k-1}-плохим»), если за Π_{k-1}-период, связанный с ним, не произойдет «катастрофы». Вероятность того, что a_i-прерывающий вызов является «Π_{k-1}-хорошим» («Π_{k-1}-плохим»), есть $\pi_{k-1}(s)$ $(1-\pi_{k-1}(s))$. Ясно также, что поток «Π_{k-1}-плохих» прерывающих вызовов, как просеянный из суммарного пуассоновского потока a_i-вызовов $(i<k)$, является пуассоновским с параметром $\sigma_{k-1}[1-\pi_{k-1}(s)]$. Таким образом, для того чтобы за k-цикл ориентации не произошло «катастрофы» $<\nu_k(s))>$, необходимо и достаточно, чтобы за длительность ориентации $(\to k)$ не произошло «катастрофы» и не поступали «Π_{k-1}-плохие» прерывающие a_i-вызовы $i<k$. Откуда и следует (6.2).

§ 4

ПЕРИОД ЗАНЯТОСТИ

Теорема 6.1. *Для указанной системы обслуживания с ориентацией*

а) Преобразование Л. — С. ф. р. длины периода занятости определяется из рекуррентных соотношений

$$\sigma_k \pi_k(s) = \sigma_{k-1} \pi_{k-1}(s + a_k) +$$

$$+ \sigma_{k-1} \{\pi_{k-1}(s + a_k[1 - \bar{\pi}_k(s)]) - \pi_{k-1}(s + a_k)\} \times$$

$$\times \nu_k(s + a_k[1 - \bar{\pi}_k(s)]) + a_k \pi_{kk}(s), \quad (6.8)$$

$$\pi_{kk}(s) = \nu_k(s + a_k[1 - \bar{\pi}_k(s)]) \cdot \bar{\pi}_k(s), \quad (6.9)$$

$$\bar{\pi}_k(s) = h_k(s + a_k[1 - \bar{\pi}_k(s)]), \quad (6.10)$$

где $\nu_k(s+a_k[1-\bar{\pi}_k(s)])$, $h_k(s+a_k[1-\bar{\pi}_k(s)])$ *для каждой из схем определяются из соответствующих выражений (6.1)—(6.7) при*

$$s = s + a_k - a_k \bar{\pi}_k(s);$$

б) условие стационарности имеет вид

$$\rho_r = \sum_{k=1}^{r} a_k b_k < 1, \quad (6.11)$$

где

$$b_1 = \frac{(\beta_{11} + c_{11})}{(1 + a_1 c_{11})};$$

b_i *определяется следующими выражениями*

для схем 1.1, 2.1 и 3.1

$$b_i = \Phi_1 \ldots \Phi_{i-1} \frac{1}{\sigma_{i-1}} \left[\frac{1}{\beta_i(\sigma_{i-1})} - 1 \right] \cdot q_i,$$

для схем 1.2, 2.2 и 3.2

$$b_i = \Phi_1 \ldots \Phi_{i-1} \frac{1}{\sigma_{i-1}} [1 - \beta_i(\sigma_{i-1})] \cdot q_i,$$

для схем 1.3, 2.3 и 3.3

$$b_i = \Phi_1 \ldots \Phi_{i-1} \beta_{i1} \cdot q_i,$$

для схем 1.4, 2.4 и 3.4

$$b_i = \Phi_1 \ldots \Phi_{i-1} \frac{1}{\sigma_{i-1}} [\beta_i(-\sigma_{i-1}) - 1] \cdot q_i,$$

$$\Phi_1 = 1; \; \Phi_i = 1 + \frac{\sigma_i - \sigma_{i-1} \pi_{i-1}(a_i)}{\sigma_{i-1}} [q_i - 1] \; (i = \overline{2, r}),$$

участвующие выше q_i $(i=\overline{2, r})$ *выражаются: для схем 1.1—1.4*

$$q_i = \frac{1}{c_i(\sigma_{i-1})},$$

для схем 2.1 — 2.4

$$q_i = 1 + \sigma_{i-1} \cdot c_{i1},$$

для схем 3.1 — 3.4

$$q_i = \bar{c}_i(-\sigma_{i-1});$$

в) при $\rho_k < 1$ *первые моменты* Π_k*-периода,* Π_{kk}*-периода,* $\bar{\Pi}_k$*-периода, k-цикла обслуживания и k-цикла ориентации соответственно равны*

$$\sigma_k \pi_{k-1} = \frac{\Phi_2 \ldots \Phi_k + \rho_{k-1}}{1-\rho_k}, \tag{6.12}$$

$$\pi_{kk1} = \left[b_k + \Phi_2 \ldots \Phi_{k-1} \frac{q_k - 1}{\sigma_{k-1}}\right] \frac{1}{1-\rho_k}, \tag{6.13}$$

$$\bar{\pi}_{k1} = \frac{b_k}{1-\rho_k}, \quad h_{k1} = \frac{b_k}{1-\rho_{k-1}}, \tag{6.14}$$

$$\nu_{k1} = \frac{q_k - 1}{\sigma_{k-1}} \frac{\Phi_2 \ldots \Phi_{k-1}}{1-\rho_{k-1}}. \tag{6.15}$$

Доказательство. ◑ а) Докажем соотношение (6.8). Покажем, что имеет место

$$\pi_k(s) = \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k} \pi_{k-1}(s + a_2) +$$

$$+ \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k} \sum_{n \geqslant 1} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_k t)^n}{n!} e^{-a_k t} d\Pi_{k-1}(t) \times$$

$$\times [\bar{\pi}_k(s)]^n \nu_k(s + a_k[1 - \bar{\pi}_k(s)]) + \frac{a_k}{\sigma_k} \pi_{kk}(s). \tag{6.16}$$

Действительно, левая часть есть вероятность того, что за Π_k-период не произойдет «катастрофы» $<\pi_k(s)>$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

либо Π_k-период с вероятностью σ_{k-1}/σ_k являлся Π_{k-1}-периодом и за время его осуществления не произошло «катастрофы» и не поступали a_k-вызовы $<\pi_{k-1}(s+a_k)>$;

либо Π_k-период с вероятностью σ_{k-1}/σ_k являлся Π_{k-1}-периодом, за время его осуществления $\langle d\Pi_{k-1}(t)\rangle$ не произошло «катастрофы» $\langle e^{-st}\rangle$, за это время поступило $n\geqslant 1$ a_k-вызовов $\left\langle\frac{(a_k t)^n}{n!}e^{-a_k t}\right\rangle$, за $\overline{\Pi}_k^{(n)}$ -период не произошло «катастрофы» $\langle[\overline{\pi}_k(s)]^n$ и за k-цикл ориентации не произошло «катастрофы» и поступили разве лишь такие a_k-вызовы, за $\overline{\Pi}_k$-периоды которых не произошло «катастрофы» $\langle\nu_k(s+a_k[1-\overline{\pi}_k(s)])\rangle$;

либо Π_k-период с вероятностью a_k/σ_k являлся Π_{kk}-периодом и за время его осуществления не произошло «катастрофы» $\langle\pi_{kk}(s)\rangle$.

Теперь (6.8) следует непосредственно из (6.16). Соотношения (6.9) и (6.10) доказываются аналогичными рассуждениями.

б) Для получения условия стационарности воспользуемся известной теоремой Смита о регенерирующих процессах.

Процесс $m(t)\{m_1(t),...,m_r(t)\}$, где $m_i(t)$ — число a_i-вызовов, находящихся в системе в момент времени t, является апериодическим регенерирующим процессом. Точками регенерации служат моменты начала периодов занятости. Цикл регенерации есть сумма длины периода занятости и длины последующего интервала, в течение которого система свободна от вызовов. Так как слагаемые сл. в. независимы и последняя имеет экспоненциальное распределение, то распределение их суммы, т. е. цикла регенерации, абсолютно непрерывно. Согласно одному из утверждений теоремы Смита, если среднее значение цикла регенерации ограничено, то процесс $m(t)$ эргодический. Ограниченность же среднего значения цикла регенерации равносильна ограниченности среднего значения периода занятости, что равносильно приведенному условию.

в) Получим (6.12)—(6.15) для схемы 1.1. Из (6.1) и (6.4) дифференцированием при $s=0$ имеем

$$\nu_{k1}=\frac{1}{\sigma_{k-1}}\left[\frac{1}{c_k(\sigma_{k-1})}-1\right](1-\sigma_{k-1}\pi_{k-11}), \tag{6.17}$$

$$h_{k1} = \frac{1}{\sigma_{k-1}} \left[\frac{1}{\beta_k(\sigma_{k-1})} - 1 \right] (1 + \sigma_{k-1} \pi_{k-11} + \sigma_{k-1} \nu_{k1}).$$

Воспользовавшись (6.17), h_{k-1} выразится

$$h_{k1} = \frac{1}{\sigma_{k-1}} \left[\frac{1}{\beta_k(\sigma_{k-1})} - 1 \right] \frac{1}{c_k(\sigma_{k-1})} (1 + \sigma_{k-1} \pi_{k-11}). \tag{6.18}$$

Найдем $1 + \sigma_{k-1}\pi_{k-11}$. Из соотношений п. а) имеем

$$\sigma_{k-1} \pi_{k-11} = \frac{1}{1 - a_{k-1} h_{k-11}} \{ \sigma_{k-2} \pi_{k-21} +$$

$$+ \sigma_{k-2} [1 - \pi_{k-2}(a_{k-1})] \nu_{k-11} + a_{k-1} \nu_{k-11} + a_{k-1} h_{k-11} \}.$$

Воспользовавшись опять (6.17), получаем

$$1 + \sigma_{k-1} \pi_{k-11} = \frac{1}{1 - a_{k-1} h_{k-11}} \times$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{\sigma_{k-1} - \sigma_{k-2} \pi_{k-2}(a_{k-1})}{\sigma_{k-2}} \left[\frac{1}{c_{k-1}(\sigma_{k-2})} - 1 \right] \right\} \times$$

$$\times (1 + \sigma_{k-2} \pi_{k-21}).$$

Обозначим фигурную скобку через Φ_{k-1} и перепишем последнее соотношение в виде

$$(1 + \sigma_{k-1} \pi_{k-11})^{-1} = \frac{1}{\Phi_{k-1}} (1 + \sigma_{k-2} \pi_{k-21})^{-1} -$$

$$- \frac{1}{\Phi_{k-1}} \frac{a_{k-1} h_{k-11}}{1 + \sigma_{k-2} \pi_{k-21}}. \tag{6.19}$$

Из (6.19), используя (6.18) и учитывая, что $\pi_{11} = (c_{11} + \beta_{11}) / (1 - a_1 \beta_{11})$, получаем

$$(1 + \sigma_{k-1} \pi_{k-11})^{-1} = \frac{1}{\Phi_2 \ldots \Phi_{k-1}} \times$$

$$\times \left\{ 1 - \left[\frac{a_1 (c_{11} + \beta_{11})}{1 + a_1 c_{11}} + \frac{a_2}{\sigma_1} \left[\frac{1}{\beta_2(\sigma_1)} - 1 \right] \times \right. \right.$$

$$\times \frac{1}{c_2(\sigma_1)} + \Phi_2 \frac{a_3}{\sigma_2} \left[\frac{1}{\beta_3(\sigma_2)} - 1 \right] \frac{1}{c_3(\sigma_2)} + \ldots$$

$$\ldots + \Phi_2 \ldots \Phi_{k-2} \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \left[\frac{1}{\beta_{k-1}(\sigma_{k-2})} - 1 \right] \times$$

$$\times \frac{1}{c_{k-1}(\sigma_{k-2})}\Big]\Big\}.$$

Откуда

$$1+\sigma_{k-1}\pi_{k-1}=\frac{\Phi_2\ldots\Phi_{k-1}}{1-\rho_{k-1}}.$$

Теперь (6.12)—(6.15) следуют из последнего соотношения, (6.17) и (6.18) из обозначений для b_i и q_i. Моменты для остальных схем получаются аналогично. ◐

§ 5
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОЧЕРЕДИ

Обозначим через $P_m(t)$ вероятность того, что в момент t в системе находятся $m=(m_1,\ldots m_r)$ вызовов, где m_i — число a_i-вызовов ($i=\overline{1, r}$). Пусть

$$P(z, t)=\sum_{m\geqslant 0} P_m(t)z^m,$$

где $z^m=z_1^{m_1}\ldots z_r^{m_r}$, $z=(z_1,\ldots, z_r)$, $0\leqslant z_i\leqslant 1$.

Цель настоящего параграфа — получить соотношения, позволяющие находить совместное распределение длины очереди в любой момент времени.

Каждый поступающий вызов объявим либо красным, либо синим, причем произвольный вызов объявляется красным с вероятностью ($0\leqslant z_i\leqslant 1$, $i=\overline{1, r}$), если он является a_i-вызовом независимо от того, какого цвета другие вызовы. Пусть, кроме того, независимо от функционирования системы происходят «катастрофы», поток которых является пуассоновским с параметром $s>0$.

Тогда производящую функцию $P(z, t)$ можно интерпретировать как вероятность того, что в момент t в системе находятся разве лишь красные вызовы, а $sp(z, s)=\int\limits_0^\infty se^{-st}P(z, t)\,dt$ как вероятность того, что первая «катастрофа» произошла в момент, когда в системе нет синих вызовов. Отметим, далее, что поток синих a_i-вызовов является пуас-

соновским с параметром $a_i(1-z_i)$; суммарный поток синих вызовов приоритета k и ниже — пуассоновский с параметром $a_k(1-z_k)+\ldots+a_r(1-z_r)=[\sigma-az]_k$. Введем еще следующие обозначения. Через $s\nu_k(z, s)$ $(sh_k(z, s)$, $s\pi_k(z, s)$ и т. д.) обозначим вероятность того, что первая «катастрофа» произошла на отдельном k-цикле ориентации (k-цикле обслуживания, Π_k-периоде и т. д.) в момент, когда в системе находятся разве лишь красные вызовы.

Преобразование Лапласа производящей функции совместного распределения числа вызовов каждого приоритета, находящихся в системе в любой момент времени, задается следующей теоремой.

Теорема 6.2. *Для всех схем указанной системы*

$$p(z, s)=\frac{1+\sigma\pi(z, s)}{s+\sigma-\sigma\pi(s)}, \tag{6.20}$$

$\sigma\pi(z, s)=\sigma_r\pi_r(z, s)$ — *определяется из рекуррентного соотношения*

$$\sigma_k\pi_k(z, s)=\sigma_{k-1}\pi_{k-1}(z, s)+\gamma_{k-1}(s, z)\nu_k(z, s)+$$
$$+\frac{h_k(z, s)}{z_k-h_k(s+[\sigma-az]_k)}[\gamma_{k-1}(s, z)\nu_k(s+[\sigma-az]_k)+$$
$$+\sigma_{k-1}\pi_{k-1}(s+a_k)-\sigma_k\pi_k(s)], \tag{6.21}$$

где

$$\gamma_{k-1}(s, z)=\sigma_{k-1}[\pi_{k-1}(s+[\sigma-az]_k)-$$
$$-\pi_{k-1}(s+a_k)]+a_kz_k; \tag{6.22}$$

$\nu_k(s+[\sigma-az]_k)$ и $h_k(s+[\sigma-az]_k)$ *для каждой из схем определяется из соотношений (6.1)—(6.7) при* $s=s+[\sigma+az]_k$; $\pi_k(s)$ — *из теоремы* 6.1; $\nu_k(z, s)$ — *из следующих выражений:*

для схем 1.1—1.4

$$\nu_k(z, s)=\frac{[1-c_k(s+[\sigma-az]_k+\sigma_{k-1})]\times[1+\sigma_{k-1}\pi_{k-1}(z, s)]}{s+[\sigma-az]_k+\sigma_{k-1}-\sigma_{k-1}\times[1-c_k(s+[\sigma-az]_k+\sigma_{k-1})]\pi_{k-1}(s+[\sigma-az]_k)}, \tag{6.23}$$

для схем 2.1 — 2.4

$$\nu_k(z, s) = \frac{1 - c_k(s + [\sigma - az]_k + \sigma_{k-1}[1 - \pi_{k-1}(s + [\sigma - az]_k)])}{s + [\sigma - az]_k + \sigma_{k-1}[1 - \pi_{k-1}(s + [\sigma - az]_k)}[1 + \sigma_{k-1}\pi_{k-1}(z, s)], \tag{6.24}$$

для схем 3.1 — 3.4

$$\nu_k(z, s) = [1 + \sigma_{k-1}\pi_{k-1}(z, s)] \times \int_0^\infty \frac{\{1 - e^{-(s + [\sigma - az]_k + \sigma_{k-1})\tau}\} \times dC_k(\tau)}{s + [\sigma - az]_k + \sigma_{k-1} - \sigma_{k-1}\pi_{k-1}(s + [\sigma - az]_k) \times [1 - e^{-(s + [\sigma - az]_k + \sigma_{k-1})\tau}]}, \tag{6.25}$$

для схем 1.1, 2.1 и 3.1

$$h_k(z, s) = \{z_k[1 - \beta_k(s + [\sigma - az]_k + \sigma_{k-1})] \times \{1 + \sigma_{k-1}[\pi_{k-1}(z, s) + \pi_{k-1}(s + [\sigma - az]_k)\nu_k(z, s)]\} \times \{s + [\sigma - az]_k + \sigma_{k-1} - \sigma_{k-1}[1 - \beta_k(s + [\sigma - az]_k + \sigma_{k-1})] \times \{\pi_{k-1}(s + [\sigma - az]_k)\nu_k(s + [\sigma - az]_k)\}^{-1}, \tag{6.26}$$

для схем 1.2, 2.2 и 3.2

$$h_k(z, s) = z_k \frac{1 - \beta_k(s + [\sigma - az]_k + \sigma_{k-1}}{s + [\sigma - az]_k + \sigma_{k-1}} \times \{1 + \sigma_{k-1}[\pi_{k-1}(z, s) + \pi_{k-1}(s + [\sigma - az]_k)\nu_k(z, s)]\}, \tag{6.27}$$

для схем 1.3, 2.3 и 3.3

$$h_k(z, s) = z_k \frac{1 - \beta_k(s + [\sigma - az]_k + \sigma_{k-1}[1 - \pi_{k-1}(s + [\sigma - az]_k)\nu_k(s + [\sigma - az]_k)]}{s + [\sigma - az]_k + \sigma_{k-1}[1 - \pi_{k-1}(s + [\sigma - az]_k)\nu_k(s + [\sigma - az]_k)]} \times \{1 + \sigma_{k-1}[\pi_{k-1}(z, s) + \pi_{k-1}(s + [\sigma - az]_k)\nu_k(z, s)]\}, \tag{6.28}$$

для схем 1.4, 2.4 и 3.4

$$h_k(z, s) = z_k\{1 + \sigma_{k-1}[\pi_{k-1}(z, s) +$$

$$+\pi_{k-1}(s+[\sigma-az]_k)\nu_k(z, s)]\}\int_0^\infty \frac{\{1 - e^{-(s+[\sigma-az]_k+\sigma_{k-1})u}\}\times}{s+[\sigma-az]_k+\sigma_{k-1}-}$$

$$\frac{\times\, dB_k(u)}{-\sigma_{k-1}\pi_{k-1}(s+[\sigma-az]_k)\nu_k(s+[\sigma-az]_k)[1-e^{-(s+[\sigma-az]_k+\sigma_{k-1})u}]}. \qquad (6.29)$$

Доказательство. ◑ Соотношение (6.20) доказано в работе [7] и в силу замечания, сделанного при доказательстве теоремы 2.1, справедливо и для рассматриваемой системы. Докажем (6.21). Установим сначала справедливость выражения

$$s\pi_k(z, s) = \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k} s\pi_{k-1}(z, s) +$$

$$+\frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k}\sum_{n\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_kt)^n}{n!}e^{-a_kt}z_k^n\, d\Pi_{k-1}(t)\, s\nu_k(z, t) +$$

$$+\frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k}\sum_{n\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_kt)^n}{n!}e^{-a_kt}\, d\Pi_{k-1}(t)\times$$

$$\times\sum_{m\geqslant 0}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_kt)^m}{m!}e^{-a_kt}\, dN_k(t)\, s\bar{\pi}_k^{(n+m)}(z, s) +$$

$$+\frac{a_k}{\sigma_k}z_k s\nu_k(z, s) +$$

$$+\frac{a_k}{\sigma_k}\sum_{n\geqslant 0}\int_0^\infty e^{-st}\frac{(a_kt)^n}{n!}e^{-a_kt}\, dN_k(t)\, s\bar{\pi}_k^{(n+1)}(z, s). \qquad (6.30)$$

Действительно, для того чтобы первая «катастрофа» произошла на отдельном Π_k-периоде в момент, когда в системе нет синих вызовов, необходимо и достаточно, чтобы

либо с вероятностью σ_{k-1}/σ_k Π_k-период являлся Π_{k-1}-периодом и первая «катастрофа» произошла на нем в момент, когда в системе нет синих вызовов $< s\pi_{k-1}(z, s) >$;

либо с вероятностью σ_{k-1}/σ_k начался Π_{k-1}-период, за время его осуществления $< d\Pi_{k-1}(t) >$ не произошло «катастрофы» $< e^{-st} >$, поступило $n \geqslant 1$ красных a_k-вызовов $\left\langle z_k^n \frac{(a_k t)^n}{n!} e^{-a_k t} \right\rangle$ и первая «катастрофа» произошла на отдельном k-цикле ориентации в момент, когда в системе нет синих вызовов $< s\nu_k(z, s) >$;

либо с вероятностью σ_{k-1}/σ_k начался Π_{k-1}-период, за время его осуществления $< d\Pi_{k-1}(t) >$ не произошло «катастрофы» $< e^{-st} >$ и поступило $n \geqslant 1$ a_k-вызовов $\left\langle \frac{(a_k t)^n}{n!} e^{-a_k t} \right\rangle$, за длительность k-цикла ориентации $< dN_2(t) >$ не произошло «катастрофы» $< e^{-st} >$, поступило $m \geqslant 0$ a_k-вызовов $\left\langle \frac{(a_2 t)^m}{m!} e^{-a_2 t} \right\rangle$ и первая «катастрофа» произошла на отдельном $\overline{\Pi}_k^{(n+m)}$-периоде в момент, когда в системе нет синих вызовов $\langle s\overline{\pi}_k^{(n+m)}(z, s) \rangle$;

либо с вероятностью a_k/σ_k Π_k-период являлся Π_{kk}-периодом и первая «катастрофа» произошла на отдельном k-цикле ориентации в момент, когда в системе нет синих вызовов $< s\nu_k(z, s) >$ (при этом a_k-вызов, которым открывается Π_{kk}-период, должен быть красным $< z_k >$);

либо с вероятностью a_k/σ_k ориентацией $(\to k)$ начался Π_{kk}-период, за длительность k-цикла ориентации $< dN_k(t) >$ не произошло «катастрофы» $< e^{-st} >$, поступило $n \geqslant 0$ a_k-вызовов $\left\langle \frac{(a_k t)^n}{n!} e^{-a_k t} \right\rangle$ и первая «катастрофа» произошла на отдельном $\overline{\Pi}_k^{(n+1)}$ периоде в момент, когда в системе нет синих вызовов $\langle s\overline{\pi}_k^{(n+1)}(z, s) \rangle$.

Вероятности $s\overline{\pi}_k^{(j)}(z, s)$ $(j = n + m,\ n + 1)$ находим, воспользовавшись соотношением (2.4), которое справедливо и в этом случае. Произведя в (6.30) суммирование и интегрирование, введя обозначения (6.22), после некоторых преобразований получаем (6.21).

Получение (6.23)—(6.29) также принципиально не отличается от получения аналогичных соотношений для схем гл. 2. ◐

Следствие. Можно показать, что при выполнении условий стационарности (6.11) существует

$$\lim_{t\to\infty} P(z, t) = P(z) \text{ и } P(z) = \lim_{s\downarrow 0} sp(z, s).$$

Таким образом, производящая функция распределения длины очереди в стационарном режиме

$$P(z) = \frac{(1 + \widehat{\sigma\pi}(z))}{(1 + \sigma\pi_1)},$$

где

$$\widehat{\sigma\pi}(z) = \sigma_r\pi_r(z, 0); \ \pi_1 = \pi_{r1}.$$

§ 6
О ВЕРОЯТНОСТЯХ СОСТОЯНИЯ ПРИБОРА

Изложенные в гл. 4 приемы, при помощи которых были получены для двух приоритетных схем вероятности состояния прибора, могут быть распространены и на исследованную в данной главе приоритетную систему обслуживания с ориентацией. Покажем это на примере приоритетной системы $M_r|C_r|1|\infty$ с нулевым временем ориентации и абсолютным приоритетом. Содержание настоящего параграфа разобьем на пункты.

1. Описание системы. В однолинейную систему обслуживания с ожиданием поступают r независимых пуассоновских потоков вызовов $L_1, \ldots, L_r$ с параметрами $a_1, .., a_r$ соответственно. Длительности обслуживания вызовов потока L_i — независимые сл. в. B_i с ф. р. $B_i(x)$. Потоки пронумерованы в порядке убывания приоритетов. Приоритет абсолютный, т. е. обслуживание вызова прерывается поступившим вызовом более высокого приоритета, который тотчас начинает обслуживаться. Вызов с прерванным обслуживанием может вновь поступать на прибор, как только система освободится от вызовов высшего приоритета, и либо обслуживаться заново (схема 1), либо дообслуживаться

оставшееся время (схема 2), либо идентично обслуживаться заново (схема 3). Кроме того, прерванный вызов может «теряться» (схема 4). В начальный момент предполагается, что система свободна от вызовов. Порядок обслуживания вызовов одного и того же приоритета — несуществен.

2. Постановка задачи. Будем говорить, что в момент t прибор находится в состоянии j, если в этот момент он занят обслуживанием вызова приоритета j $(j=\overline{1, r})$. Пусть $\mathcal{P}_j(t)$ есть вероятность того, что в момент t прибор находится в состоянии j. Для системы п. 1 интересуемся соотношениями, позволяющими находить вероятности $\mathcal{P}_j(t)$ для любого t и фиксированного j $(j=\overline{1, r})$. Результаты получим в терминах преобразования Лапласа и Л. — С. Как следствие получим стационарные вероятности состояния прибора.

3. Определения и обозначения. Приведем необходимые определения и обозначения, следуя в основном работам [2, 7]. Назовем

k-циклом промежуток времени, начинающийся с момента начала обслуживания a_k-вызова и кончающийся сразу, как только прибор освобождается от данного вызова и вызовов приоритета выше k (σ_k-вызовов);

k-периодом промежуток времени, начинающийся с момента поступления на прибор некоторого σ_k-вызова при отсутствии в системе других σ_k-вызовов и кончающийся моментом освобождения системы от σ_k-вызовов;

kk-периодом промежуток времени, начинающийся с момента поступления на прибор a_k-вызова при отсутствии в системе σ_k-вызовов и кончающийся моментом освобождения системы от σ_k-вызовов;

kkn-периодом промежуток времени, начинающийся с момента первого поступления на прибор одного из n находящихся в системе a_k-вызовов и кончающийся моментом освобождения системы от σ_k-вызовов;

периодом занятости системы — промежуток времени, начинающийся моментом начала обслуживания вызова, поступившего в свободную систему

и заканчивающийся следующим моментом освобождения системы от вызовов. Период занятости есть, очевидно, r-период, kk-период есть $kk1$-период.

Обозначим через $H_k(t)$, $\Pi_k(t)$, $\Pi_{kk}(t)$, $\Pi_{kk}^{(n)}(t)$ и $\Pi(t)$ ф. р. названных соответственно промежутков, а через $h_k(s)$, $\pi_k(s)$, $\pi_{kk}^{(n)}(s)$ и $\pi(s)$ — преобразования Л. — С. этих ф. р. Первые моменты от соответствующих ф. р. обозначим, как и выше, теми же малыми буквами с добавлением индекса 1, например β_{ks}, h_{k1}. Параметр суммарного потока вызовов приоритета k и выше обозначается $\sigma_k (\sigma_k = a_1 + \ldots + a_k$, $\sigma_0 = 0$, $\sigma_r = \sigma$. Кроме того, условимся считать, что порядок обслуживания для вызовов одного и того же приоритета — инверсионный. Это предположение, очевидно, не влияет на вероятности $\mathcal{P}_j t$.

4. Предварительные замечания. Пусть независимо от функционирования системы происходят «катастрофы», моменты поступления которых образуют пуассоновский поток с параметром $s>0$. Тогда $sp_j(s) = s\int\limits_0^\infty e^{-st}\mathcal{P}_j(t)\,dt$ можно интерпретировать как вероятность того, что первая «катастрофа» произошла в момент, когда прибор находится в состоянии j $(j=\overline{1, r})$. Исходя из этого вероятностного смысла, будем получать соотношения для $p_j(s)$ $(j=\overline{1, r})$, в связи с чем введем еще некоторые обозначения. Обозначим через $s_jh_k(s)$, $(s_j\pi_k(s), \ldots, s_j\pi(s))$ вероятность того, что первая «катастрофа» произошла на отдельном k-цикле (отдельном k-периоде..., отдельном периоде занятости) в момент, когда прибор находится в состоянии j $(j\leqslant k)$. Нам потребуются, далее, соотношения, выражающие для каждой из схем преобразование Л. — С. ф. р. $H_k(t)$ и, кроме того, выражения для $\pi_k(s)$ и $\pi_{kk}(s)$. Эти выражения получены в [1], [2] и однозначно определяются из рекуррентных соотношений:

Для схемы 1 (обслуживание заново)

$$h_k(s) = \beta_k(s+\sigma_{k-1})\left\{1 - \frac{\sigma_{k-1}}{s+\sigma_{k-1}} \times \right.$$
$$\left. \times [1-\beta_k(s+\sigma_{k-1})]\,\pi_{k-1}(s)\right\}^{-1}, \qquad (6.31)$$

для схемы 2 (дообслуживание)

$$h_k(s) = \beta_k(s + \sigma_{k-1} - \sigma_{k-1}\pi_{k-1}(s)), \qquad (6.32)$$

для схемы 3 (идентичное обслуживание заново)

$$h_k(s) = \int_0^{\infty} e^{(-s+\sigma_{k-1})x}\left[1 - \frac{\sigma_{k-1}}{s+\sigma_{k-1}} \times \right.$$

$$\left. \times (1 - e^{-(s+\sigma_{k-1})x})\,\pi_{k-1}(s)\right]^{-1} dB_k(x), \qquad (6.33)$$

для схемы 4 (прерванный вызов «теряется»)

$$h_k(s) = \beta_k(s + \sigma_{k-1}) + \frac{\sigma_{k-1}}{s+\sigma_{k-1}}[1-\beta_k(s+\sigma_{k-1})]\pi_{k-1}(s); \qquad (6.34)$$

$$\sigma_k\pi_k(s) = \sigma_{k-1}\pi_{k-1}(s + a_k - a_k\pi_{kk}(s)) + a_k\pi_{kk}(s); \qquad (6.35)$$

$$\pi_{kk}(s) = h_k(s + a_k - a_k\pi_{kk}(s)). \qquad (6.36)$$

Здесь и далее $\beta_k(s)$ есть преобразование Л.—С. ф. р. $B_k(t)$.

5. Вспомогательные соотношения. Получим вероятности состояния прибора на отдельном kkn-периоде и отдельном k-цикле.

Л е м м а 6.1. *Преобразование Лапласа вероятностей нахождения прибора в состоянии j ($j=\overline{1, k}$) в любой момент времени отдельного kkn-периода определяется из соотношения*

$$_j\pi_{kk}(s) = {}_jh_k(s)\frac{1-[\pi_{kk}(s)]^n}{1-h_k(s)}, \qquad (6.37)$$

где $\pi_{kk}(s)$ определяется из (4.6), $h_k(s)$ для каждой из схем из соотношений (6.31)—(6.34) соответственно $_jh_k(s)$ будут получены ниже.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 6.1 приводится по той же схеме, по которой проведено доказательство леммы 5.1.

Лемма 6.2. *Функция* ${}_jh_k(s)$ $(j=\overline{1,k})$ *определяется из выражения*

$$
{}_jh_k(s)=\begin{cases} G_j(s)Q_j(s)\prod\limits_{i=j+1}^{k-1}\{1+Q_i(s)\} & \text{при } j<k-1,\\ G_k(s)Q_k(s) & \text{при } j=k-1,\\ G_k(s) & \text{при } j=k, \end{cases}
$$

где

$$
Q_i(s)=[\sigma_{i-1}\pi_{i-1}(s)-\sigma_i\pi_i(s)+Q_i]\frac{G_i(s)}{1-h_i(s)}, \qquad (6.38)
$$

$G_i(s)$ *для каждой из схем равно:*

для схемы 1 (обслуживание заново)

$$
G_i(s)=\frac{1-\beta_i(s+\sigma_{i-1})}{s+\sigma_{i-1}-\sigma_{i-1}[1-\beta_i(s+\sigma_{i-1})]\pi_{i-1}(s)}, \qquad (6.39)
$$

для схемы 2 (дообслуживание)

$$
G_i(s)=\frac{1-\beta_i(s+\sigma_{i-1}[1-\pi_{i-1}(s)])}{s+\sigma_{i-1}[1-\pi_{i-1}(s)]}, \qquad (6.40)
$$

для схемы 3 (идентичное обслуживание заново)

$$
G_i(s)=\int\limits_0^\infty\frac{[1-e^{-(s+\sigma_{i-1})x}]\,dB_i(x)}{s+\sigma_{i-1}-\sigma_{i-1}\pi_{i-1}(s)[1-e^{-(s+\sigma_{i-1})x}]}, \qquad (6.41)
$$

для схемы 4 («потеря» вызова)

$$
G_i(s)=\frac{(1-\beta_i(s+\sigma_{i-1}))}{(s+\sigma_{i-1})}; \qquad (6.42)
$$

Фигурирующие всюду выше $h_i(s)$ *и* $\pi_{i-1}(s)$ *определяются из (6.31)—(6.35).*

Доказательство. ◑ Рассмотрим строение k-цикла для каждой из схем в отдельности. Пусть рассматривается схема 1 и пусть $j<k$. Пусть, далее, первая «катастрофа» произошла на отдельном k-цикле в момент, когда прибор находится в состояний $j<s_j h_k(s)>$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

либо обслуживание a_k-вызова прерывалось σ_{k-1}-вызовом, до момента прерывания не произошло

«катастрофы» $<\sigma_{k-1}/(s+\sigma_{k-1})\times[1-\beta_k(s+\sigma_{k-1})]>$ и первая «катастрофа» произошла на последовавшем затем отдельном $(k-1)$-периоде в момент, когда прибор находится в состоянии $j < s_j\pi_{k-1}(s) >$;

либо обслуживание a_k-вызова прерывалось σ_{k-1}-вызовом, до момента прерывания не произошло катастрофы

$$\left\langle \frac{\sigma_{k-1}}{s+\sigma_{k-1}}[1-\beta_k(s+\sigma_{k-1}]\right\rangle,$$

не произошло «катастрофы» также за последовавший затем $(k-1)$-период $<\pi_{k-1}(s)>$ и первая «катастрофа» наступила на начавшемся заново k-цикле в момент, когда прибор находится в состоянии $j < s_j h_k(s) >$.

Другими словами,

$$s_j h_k(s) = \frac{\sigma_{k-1}}{s+\sigma_{k-1}}[1-\beta_k(s+\sigma_{k-1})]\, s_j\, \pi_{k-1}(s) + $$
$$+\frac{\sigma_{k-1}}{s+\sigma_{k-1}}[1-\beta_k(s+\sigma_{k-1})]\, \pi_{k-1}(s)\, s_j h_k(s).$$

Откуда

$$_j h_k(s) = \frac{1-\beta_k(s+\sigma_{k-1})}{\sigma_{k-1}+s+\sigma_{k-1}[1-\beta_k(s+\sigma_{k-1})]\pi_{k-1}(s)}\,\sigma_{k-1}\, {}_j\pi_{k-1}(s). \quad (6.43)$$

В случае, когда $j=k$,

$$s_k h_k(s) = \frac{s}{s+\sigma_{k-1}}[1-\beta_k(s+\sigma_{k-1})] + $$
$$+\frac{\sigma_{k-1}}{s+\sigma_{k-1}}[1-\beta_k(s+\sigma_{k-1})]\, \pi_{k-1}(s)\, s_k h_k(s),$$

что означает, что первая «катастрофа» произошла на отдельном k-цикле в момент обслуживания a_k-вызова. Из последнего соотношения следует, что

$$_k h_k(s) = \frac{1-\beta_k(s+\sigma_{k-1})}{s+\sigma_{k-1}-\sigma_{k-1}[1-\beta_k(s+\sigma_{k-1})]\,\pi_{k-1}(s)}. \quad (6.44)$$

Рассмотрим схему 2. Обозначим через x время, отсчитываемое от начала k-цикла только тогда, когда происходит обслуживание a_k-вызова. При $j<k$ справедливо равенство

$$s_j h_k(s) = \int_0^\infty [1 - B_k(x)]\, e^{-sx} e^{-\sigma_{k-1}[1-\pi_{k-1}(s)]x} \times$$

$$\times\ \sigma_{k-1}\, dx\, s_j \pi_{k-1}(s).$$

Действительно, для того чтобы первая «катастрофа» произошла на отдельном k-цикле в момент, когда прибор находится в состоянии $j < s_j h_k(s) >$, необходимо и достаточно, чтобы в промежутке $[x, x+dx)$, когда обслуживание a_k-вызова не закончено $< 1 - B_k(x) >$, поступил σ_{k-1}-вызов $< \sigma_{k-1} dx >$, до этого момента не произошло «катастрофы» $< e^{-sx} >$, поступали разве лишь такие σ_{k-1}-вызовы, за $(k-1)$-периоды которых не происходили «катастрофы» $\langle e^{-\sigma_{k-1}[1-\pi_{k-1}(s)]x} \rangle$ и первая «катастрофа» наступила на начавшемся (сразу после момента прерывания) отдельном $(k-1)$-периоде в момент, когда прибор находится в состоянии $j < s_j \pi_{k-1}(s) >$.

Таким образом, для схемы 2 при $j < k$

$$_j h_k(s) = \frac{1 - \beta_k(s + \sigma_{k-1}\pi_{k-1}(s))}{s + \sigma_{k-1} - \sigma_{k-1}\pi_{k-1}(s)}\, {}_j\pi_{k-1}(s). \qquad (6.45)$$

Аналогично при $j = k$ имеем

$$s_k h_k(s) = \int_0^\infty [1 - B_k(x)]\, e^{-\sigma_{k-1}[1-\pi_{k-1}(s)]x} s e^{-sx}\, dx,$$

или

$$_k h_k(s) = \frac{1 - \beta_k(s + \sigma_{k-1} - \sigma_{k-1}\pi_{k-1}(s))}{s + \sigma_{k-1} - \sigma_{k-1}\pi_{k-1}(s)}. \qquad (6.46)$$

Подобными рассуждениями, что и для схемы 1, получаем $_j h_k(s)$ для схем 3 и 4. Для схемы 3

$$_j h_k(s) = \int_0^\infty \frac{[1 - e^{-(s+\sigma_{k-1})x}]\, dB_k(x)}{s + \sigma_{k-1} - \sigma_{k-1}\pi_{k-1}(s)\, [1 - e^{-(s+\sigma_{k-1})x}]}\, \sigma_{k-1}\, {}_j\pi_{k-1}(s) \qquad (6.47)$$

при $j < k$ и

$$_k h_k(s) = \int_0^\infty \frac{[1 - e^{-(s+\sigma_{k-1})x}]\, dB_k(x)}{s + \sigma_{k-1} - \sigma_{k-1}\pi_{k-1}(s)\, [1 - e^{-(s+\sigma_{k-1})x}]} \qquad (6.48)$$

при $j = k$. Для схемы 4

$$ {}_j h_k(s) = \frac{1 - \beta_k(s + \sigma_{k-1})}{s + \sigma_{k-1}} \sigma_{k-1} \, {}_j\pi_{k-1}(s) \quad (6.49)$$

при $j < k$ и

$$ {}_k h_k(s) = \frac{1 - \beta_k(s + \sigma_{k-1})}{s + \sigma_{k-1}} \quad (6.50)$$

при $j = k$.

Убедимся, далее, что при $j < k$ справедливо соотношение

$$s_j \pi_k(s) = \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k} s_j \pi_{k-1}(s) +$$

$$+ \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k} \sum_{n \geqslant 1} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_k t)}{n!} e^{-a_k t} d\Pi_{k-1}(t) \times$$

$$\times s_j \pi_{kk}^{(n)}(s) + \frac{a_k}{\sigma_k} s_j \pi_{kk}(s). \quad (6.51)$$

Действительно, пусть первая «катастрофа» произошла на отдельном k-периоде в момент, когда прибор находится в состоянии j $(j = \overline{1, k-1})$ $\langle s_j\pi_k(s) \rangle$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

либо с вероятностью σ_{k-1}/σ_k k-период являлся $(k-1)$-периодом и первая «катастрофа» произошла на нем в момент, когда прибор находится в состоянии j $\langle s_j\pi_{k-1}(s) \rangle$;

либо с вероятностью σ_{k-1}/σ_k k-период являлся $(k-1)$-периодом, за время его осуществления $\langle d\Pi_{k-1}(t) \rangle$ не произошло «катастрофы» $\langle e^{-st} \rangle$, поступило $n \geqslant 1$ a_k-вызовов $\left\langle \frac{(a_k t)^n}{n!} e^{-a_k t} \right\rangle$ и первая «катастрофа» произошла на начавшемся затем kkn-периоде в момент, когда прибор находится в состоянии $\langle s_j \pi_{kk}^{(n)}(s) \rangle$;

либо с вероятностью a_k/σ_k k-период являлся kk-периодом и первая «катастрофа» произошла на нем в момент, когда прибор находится в состоянии j $\langle s_j\pi_{kk}(s) \rangle$.

Аналогично при $j = k$

$$s_k \pi_k(s) = \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k} \sum_{n \geqslant 1} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(a_k t)^n}{n!} e^{-a_k t} d\Pi_{k-1}(t) \times$$

$$\times s_k \pi_{kk}^{(n)}(s) + \frac{a_k}{\sigma_k} s_k \pi_{kk}(s). \qquad (6.52)$$

Подставляя в (6.51) и (6.52) выражения для $s_j \pi_{kk}^{(n)}(s)$ $(j \leqslant k)$, произведя суммирование, затем интегрирование и воспользовавшись выражением (6.35), окончательно имеем

$$\sigma_{k\,j}\pi_k(s) = \sigma_{k-1\,j}\,\pi_{k-1}(s) +$$
$$+ \frac{{}_j h_k(s)}{1 - h_k(s)} \left[\sigma_{k-1}\,\pi_{k-1}(s) - \sigma_k\,\pi_k(s) + a_k\right] \qquad (6.53)$$

при $j < k$ и

$$\sigma_{k\,k}\pi_k(s) = \frac{{}_k h_k(s)}{1 - h_k(s)} \left[\sigma_{k-1}\,\pi_{k-1}(s) - \sigma_k\,\pi_k(s) + a_k\right] \qquad (6.54)$$

при $j = k$.

Введя для каждой из схем обозначения (6.39)—(6.42), из (6.53), с учетом (6.43), (6.45), (6.47) и (6.49), при фиксированном j имеем

$$\sigma_{k\,j}\pi_k(s) = \sigma_{k-1\,j}\pi_{k-1}(s) \times$$
$$\times \left\{1 + \frac{G_k(s)}{1 - h_k(s)} \left[\sigma_{k-1}\,\pi_{k-1}(s) - \sigma_k\pi_k(s) + a_k\right]\right\} =$$
$$= \sigma_{k-2\,j}\pi_{k-2}(s) \times$$
$$\times \left\{1 + \frac{G_{k-1}(s)}{1 - h_{k-1}(s)} \left[\sigma_{k-2}\pi_{k-2}(s) - \sigma_{k-1}\pi_{k-1}(s) + a_{k-1}\right]\right\} \times$$
$$\times \left\{1 + \frac{G_k(s)}{1 - h_k(s)} \left[\sigma_{k-1}\,\pi_{k-1}(s) - \sigma_k\pi_k(s) + a_k\right]\right\} =$$
$$= \ldots = \sigma_{j\,j}\pi_j(s) \times$$
$$\times \left\{1 + \frac{G_{j+1}(s)}{1 - h_{j+1}(s)} \left[\sigma_j\,\pi_j(s) - \sigma_{j+1}\,\pi_{j+1}(s) + a_{j+1}\right]\right\} \times$$
$$\times \ldots \times \left\{1 + \frac{G_k(s)}{1 - h_k(s)} \left[\sigma_{k-1}\,\pi_{k-1}(s) - \sigma_k\pi_k(s) + a_k\right]\right\}. \qquad (6.55)$$

Согласно (6.54)

$$\sigma_{j\,j}\pi_j(s) = \frac{G_j(s)}{1 - h_j(s)} \left[\sigma_{j-1}\,\pi_{j-1}(s) - \sigma_j\pi_j(s) + a_j\right]. \qquad (6.56)$$

С учетом (6.56)

$$\sigma_{k\,j}\pi_k(s) = \frac{G_j(s)}{1-h_j(s)}[\sigma_{j-1}\pi_{j-1}(s) - \sigma_j\pi_j(s) + a_j] \times$$

$$\times \left\{1 + \frac{G_{j+1}(s)}{1-h_{j+1}(s)}[\sigma_j\pi_j(s) - \sigma_{j+1}\pi_{j+1}(s) + a_{j+1}]\right\} \times$$

$$\times \ldots \times \left\{1 + \frac{G_k(s)}{1-h_k(s)}[\sigma_{k-1}\pi_{k-1}(s) - \sigma_k\pi_k(s) + a_k]\right\}.$$

Окончательно, в обозначениях (6.38) имеем

$$\sigma_{k\,j}\pi_k(s) = Q_j(s)\prod_{i=j+1}^{k}\{1 + Q_i(s)\} \text{ при } j < k, \quad (6.57)$$

$$\sigma_{k\,k}\pi_k(s) = Q_k(s) \quad \text{при } j = k. \quad (6.58)$$

Теперь формулировка леммы 6.2 следует из формул (6.43)—(6.50) и (6.57), (6.58). ◐

6. Основные соотношения.

Теорема 6.3. *Преобразование Лапласа вероятностей $\mathscr{P}_j(t)$ состояния прибора в любой момент времени определяется из выражения*

$$p_j(s) = \frac{\sigma_j\pi(s)}{(s + \sigma - \sigma\pi(s))}, \quad (6.59)$$

где

$$\sigma_j\pi(s) = \sigma_{r\,j}\pi_r(s) = \frac{G_j(s)}{1-h_j(s)}[\sigma_{j-1}\pi_{j-1}(s) - \sigma_j\pi_j(s) + a_j] \times$$

$$\times \prod_{i=j+1}^{r}\left\{1 + \frac{G_i(s)}{1-h_i(s)}[\sigma_{i-1}\pi_{i-1}(s) - \sigma_i\pi_i(s) + a_i]\right\}$$

при $j < r$, (6.60)

$$\sigma_r\pi(s) = \sigma_{r\,r}\pi_r(s) =$$

$$= \frac{G_r(s)}{1-h_r(s)}[\sigma_{r-1}\pi_{r-1}(s) - \sigma_r\pi_r(s) + a_r] \text{ при } j = r; \quad (6.61)$$

$\pi_i(s)$ определяется из (6.35); $\pi(s) = \pi_r(s)$, а $h_i(s)$ и $G_i(s)$ определяются из соотношений (6.31)—(6.34) и (6.39)—(6.42) соответственно.

Доказательство. ◑ Соотношения (6.60) и (6.61) получаются из (6.57) и (6.58) при $k=r$. Соотношение (6.59) совпадает с (5.25), что и естественно, так как при доказательстве (5.25) не затрагивалась структура отдельного периода занятости. ◐

Следствие. Получим вероятности $\mathcal{P}_j (j=\overline{1, r})$ состояния прибора в стационарном режиме. Положим

для схемы 1

$$\rho_k = a_1 \beta_{11} + \frac{a_2}{\sigma_1}\left[\frac{1}{\beta_2(\sigma_1)} - 1\right] + \ldots$$

$$\ldots + \frac{a_k}{\sigma_{k-1}}\left[\frac{1}{\beta_k(\sigma_{k-1})} - 1\right],$$

для схемы 2

$$\rho_k = a_1 \beta_{11} + a_2 \beta_{21} + \ldots + a_k \beta_{k1},$$

для схемы 3

$$\rho_k = a_1 \beta_{11} + \frac{a_2}{\sigma_1}[\beta_2(-\sigma_1) - 1] + \ldots$$

$$\ldots + \frac{a_k}{\sigma_{k-1}}[\beta_k(-\sigma_{k-1}) - 1],$$

для схемы 4

$$\rho_k = a_1 \beta_{11} + \frac{a_2}{\sigma_1}[1 - \beta_2(\sigma_1)] + \ldots$$

$$\ldots + \frac{a_k}{\sigma_{k-1}}[1 - \beta_k(\sigma_{k-1})].$$

При выполнении условия стационарности системы, $\rho_r < 1$ из соотношений (6.59)—(6.61) можно найти вероятности $\mathcal{P}_j$ обслуживания вызова приоритета j в стационарном режиме. Можно показать, что $\lim\limits_{t\to\infty} \mathcal{P}_j(t) = \mathcal{P}_j$ и $\mathcal{P}_j = \lim\limits_{s\downarrow 0} s p_j(s)$. Переходя к пределу при $s \downarrow 0$ в (6.59) получим

$$\mathcal{P}_j = \frac{\sigma_j \pi(0)}{(1 + \sigma\pi_1)}, \tag{6.62}$$

где $\sigma\pi_1 = \sigma_r \pi_{r1}$ получено [2] и $\sigma\pi_1 = \rho_r/(1-\rho_r)$. Найдем $\sigma_j \pi(0)$ (при $j<r$). Из (6.60) имеем

$$\sigma_j\pi(0) = \sigma_{r\,j}\pi_r(0) = [\sigma_j\pi_{j1} - \sigma_{j-1}\,\pi_{j-1l}]\,G_j(0) \times$$

$$\times \prod_{i=j+1}^{r} \left\{1 + \frac{[\sigma_i\,\pi_{i1} - \sigma_{i-1}\,\pi_{i-1l}]\,G_i(0)}{h_{i1}}\right\}.$$

Воспользовавшись далее выражениями для h_{i1} и π_{i1}, полученными в [2]

$$\sigma_i\,\pi_{i1} = \frac{\rho_i}{(1-\rho_i)}, \quad h_{i1} = G_i(0) = \frac{1}{(1-\rho_{i-1})},$$

имеем

$$\sigma_j\,\pi(0) = \frac{\rho_j(1-\rho_j)^{-1} - \rho_{j-1}(1-\rho_{j-1})^{-1}}{(1-\rho_{j-1})^{-1}} \times$$

$$\times \prod_{i=j+1}^{r} \left\{1 + \frac{\rho_i(1-\rho_i)^{-1}}{(1-\rho_{i-1})^{-1}}\right\} =$$

$$= \left[\frac{\rho_j}{1-\rho_j} - \frac{\rho_j}{1-\rho_j}\,\rho_{j-1} - \rho_{j-1}\right] \times$$

$$\times \prod_{i=j+1}^{r} \left\{1 + \frac{\rho_i}{1-\rho_i} - \frac{\rho_i}{1-\rho_i}\,\rho_{i-1} - \rho_{i-1}\right\} =$$

$$= \frac{\rho_j - \rho_{j-1}}{1-\rho_j} \prod_{i=j+1}^{r} \frac{1-\rho_{i-1}}{1-\rho_i} = \frac{\rho_j - \rho_{j-1}}{1-\rho_r}.$$

При $j = r$ из (6.56) следует

$$\sigma_r\pi(\theta) = \sigma_r\pi_r(0) = \frac{(\rho_r - \rho_{r-1})}{\rho_r}.$$

Таким образом, из (6.62) получим для каждого j ($j=\overline{1, r}$; $\rho_0=0$)

$$\mathcal{P}_j = \rho_j - \rho_{j-1}.$$

Вероятность застать систему свободной $\mathcal{P}_0$ (в стационарном режиме), очевидно,

$$\mathcal{P}_0 = 1 - \sum_{i=1}^{r} \mathcal{P}_i = 1 - \rho_r.$$

Глава 7

СИСТЕМА $M_r|G_r|1|\infty$ С ОРИЕНТАЦИЕЙ И СМЕШАННЫМ ПРИОРИТЕТОМ

§ 1
ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Дисциплина обслуживания со смешанным приоритетом рассматривалась Н. Джейсуолом [3] при исследовании задачи обслуживания одним прибором (без ориентации) двух потоков требований. Для двух потоков эта дисциплина описывается следующим образом: если время обслуживания меньше заданной величины θ, то реализуется абсолютный приоритет, в противном случае — относительный. Система $M_2|G_2|1|\infty$ со смешанным приоритетом (с дообслуживанием) и с учётом времени переключения прибора при прерывании обслуживания неприоритетного требования и при возвращении к его обслуживанию исследовалась в [27]. Указанная система исследуется в [27] приемами работы [3], при этом прерванное переключение идентично осуществляется заново.

В настоящей главе изучается модель обслуживания со смешанным приоритетом в более общей постановке. Во-первых, предполагается, что число приоритетных классов произвольное. Во-вторых, кроме схемы с дообслуживанием прерванного вызова и осуществлением заново прерванной ориентации ниже рассматриваются и другие ситуации, обусловленные дальнейшей судьбой прерванного обслуживания и прерванной ориентации.

Исследование дисциплины обслуживания со смешанным приоритетом представляет важное прикладное значение, так как при выборе подходящим образом управляющих параметров θ_2,

$\theta_3, \ldots, \theta_r$, можно регулировать характеристики, относящиеся к различным приоритетным классам и тем самым обеспечить более эффективное обслуживание по сравнению с «чистыми» дисциплинами абсолютного и относительного приоритета.

§ 2

ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В однолинейную систему обслуживания с ожиданием поступают $L_1, \ldots, L_r$ независимых пуассоновских потоков с параметрами $a_1, \ldots, a_r$ соответственно. Длительности обслуживания вызовов потока L_i — независимые сл. в. B_i с ф. р. $B_i(x)$ $(i=\overline{1, r})$. Между вызовами разных потоков установлены приоритеты. Потоки пронумерованы в порядке убывания приоритетов. Приоритет смешанный: если время обслуживания вызова потока $L_k(k=\overline{1, r})$ меньше заданной величины $\theta_k(k=\overline{2, r})$, то реализуется абсолютный приоритет, в противном случае — относительный. Ориентация (переключение) прибора имеет место только при прерываниях обслуживания и при возвращениях к прерванному обслуживанию. Так, если обслуживание вызова потока L_j прерывается поступлением вызова потока L_i $i<j$, то сначала осуществляется ориентация прибора к L_i $(\to i)$. После того как система освобождается от вызовов приоритета выше j, осуществляется ориентация $(\to j)$ и лишь затем прибор готов заниматься прерванным вызовом. Следуя работе [27], ориентацию $(\to i)$ можно трактовать, как время, необходимое для защиты прерванного вызова (задачи) потока L_j, а ориентацию $(\to j)$ — как время для восстановления прерванной задачи. Длительности ориентации $(\to k)$ являются независимыми сл. в. C_k с ф. р. $C_k(x)$ $(k=\overline{1, r})$. Сл. в. C_k и B_i независимы в совокупности. Произвольная ориентация $(\to k)$, разумеется, также может быть прервана поступлением вызова приоритета выше k.

Введем, далее, следующую классификацию схем. Каждую схему обозначим двумя индекса-

ми ij. Первый индекс призван указать судьбу прерванного обслуживания, второй — судьбу прерванной ориентации. Будем полагать, что при $i=1$ прерванный вызов дообслуживается, а при $i=2$ — обслуживается заново. При $j=1$ прерванная ориентация осуществляется заново, при $j=2$ — дοориентируется и при $j=3$ — идентично ориентируется заново. Например, схема 2.3 означает вышеописанную систему обслуживания с дообслуживанием прерванного вызова и идентично осуществлением заново прерванной ориентации.

Для схем ij ищем

$$p(z, s) = \int_0^\infty e^{-st} P(z, t)\, dt,$$

где

$$P(z, t) = \sum_{m \geqslant 0} P_m(t) z^m, \quad (z^m = z_1^{m_1} \dots z_r^{m_r},\ 0 \leqslant z_i \leqslant 1),$$

а $P_m(t)$ — вероятность, что в момент t в системе находятся $m=(m_1, \dots, m_r)$ вызовов. Попутно получены и другие характеристики функционирования системы, такие как распределение Π_k-периодов (а значит, и периода занятости, так как $\sigma\pi(s) = \sigma_r\pi_r(s)$), $\overline{\Pi}_{kk}$-периодов, k-циклов обслуживания, Π_{kk}-периодов и других промежутков, распределение длины очереди на отдельно взятом Π_k-периоде, отдельно взятом $\overline{\Pi}_{kk}$-периоде и других отдельных промежутков. Как следствие получено распределение длины очереди в стационарном режиме и для некоторых схем вычислены первые моменты длины основных и вспомогательных промежутков.

§ 3

ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ

Сохраняются все обозначения и определения гл. 6, кроме обозначения $\overline{\Pi}_k$-периода. На протяжении этой главы вместо $\overline{\Pi}_k$-период будем писать $\overline{\Pi}_{kk}$-период, имея в виду при этом определении

$\overline{\Pi}_k$-периода. Ф. р. $\overline{\Pi}_{kk}$-периода обозначим $\overline{\Pi}_{kk}(t)$. Через $\overline{\Pi}_k(t)$ обозначим ф. р. k-периода [2, 7]: промежуток времени, начинающийся с момента поступления на прибор некоторого вызова приоритета k или выше (σ_k-вызова), при отсутствии в системе других σ_k-вызовов, и кончающийся моментом освобождения системы от σ_k-вызовов. Преобразование Лапласа по времени от производящей функции совместного распределения длины очереди в любой момент времени отдельно взятого промежутка обозначается: $\pi(z, s)$ — для отдельного периода занятости, $\overline{\pi}_{kk}(z, s)$ — для отдельного $\overline{\Pi}_{kk}$-периода, $\overline{\pi}(z, s)$ — для отдельного k-периода, $\pi_{kk}(z, s)$ — для отдельного Π_{kk}-периода... .

§ 4
ПЕРИОД ЗАНЯТОСТИ

Лемма 7.1. *Преобразование Лапласа — Стилтьеса ф. р. k-цикла обслуживания определяется из соотношений:*

для схем 1J

$$h_k(s) = \int_0^{\theta_k} e^{-(s+\sigma_{k-1}[1-\pi_{k-1}(s)\nu_k(s)]x}\, dB_k(x) +$$

$$+ e^{-(\sigma_{k-1}[\overline{\pi}_{k-1}(s)-\pi_{k-1}(s)\nu_k(s)])\,\theta_k} \int_{\theta_k}^{\infty} e^{-(s+\sigma_{k-1}[1-\overline{\pi}_{k-1}(s)]x}\, dB_k(x); \qquad (7.1)$$

для схем $2j$

$$h_k(s) = \Big\{\int_0^{\theta_k} e^{-(s+\sigma_{k-1})x}\, dB_k(x) + e^{-\sigma_{k-1}\overline{\pi}_{k-1}(s)\theta_k} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} e^{-(s+\sigma_{k-1}[1-\pi_{k-1}(s)])x}\, dB_k(x)\Big\} \times$$

$$\times \Big\{1 - \sigma_{k-1}\pi_{k-1}(s)\,\nu_k(s) \int_0^{\theta_k} e^{-(s+\sigma_{k-1})x}[1 - B_k(x)]dx\Big\}^{-1}. \qquad (7.2)$$

где $\nu_k(s)$ *выражается*

для схем i1

$$\nu_k(s) = c_k(s+\sigma_{k-1}) \times$$

$$\times \left\{1 - \frac{\sigma_{k-1}}{s+\sigma_{k-1}} [1 - c_k(s+\sigma_{k-1})]\, \pi_{k-1}(s)\right\}^{-1}; \quad (7.3)$$

для схем *i*2

$$\nu_k(s) = c_k(s + \sigma_{k-1}[1 - \pi_{k-1}(s)]; \quad (7.4)$$

для схем *i*3

$$\nu_k(s) = (s + \sigma_{k-1}) \int_0^\infty e^{-(s+\sigma_{k-1})\tau} \{s + \sigma_{k-1}[1 - \pi_{k-1}(s) \times$$

$$\times [1 - e^{-(s+\sigma_{k-1})\tau}]]\}^{-1}\, dC_k(\tau), \quad (7.5)$$

а фигурирующие выше $\bar{\pi}_k(s)$ и $\pi_{k-1}(s)$ *однозначно определяются из рекуррентных соотношений теоремы 7.1.*

Теорема 7. 1.

Для всех схем

$$\sigma_k \bar{\pi}_k(s) = \sigma_{k-1} \bar{\pi}_{k-1}(s + a_k - a_k \bar{\pi}_{kk}(s)) + a_k \bar{\pi}_{kk}(s), \quad (7.6)$$

$$\bar{\pi}_{kk}(s) = h_k(s + a_k - a_k \bar{\pi}_{kk}(s)), \quad (7.7)$$

$$\sigma_k \pi_k(s) = \sigma_{k-1} \pi_{k-1}(s + a_k) + \sigma_{k-1}\{\pi_{k-1}(s + a_k[1 - \bar{\pi}_{kk}(s)]) -$$

$$- \pi_{k-1}(s + a_k)\}\, \nu_k(s + a_k[1 - \bar{\pi}_{kk}(s)]) + a_k \pi_{kk}(s), \quad (7.8)$$

$$\pi_{kk}(s) = \nu_k(s + a_k[1 - \bar{\pi}_{kk}(s)])\, \bar{\pi}_{kk}(s), \quad (7.9)$$

где $h_k(s + a_k - a_k \bar{\pi}_{kk}(s))$ и $\nu_k(s + a_k - a_k \bar{\pi}_{kk}(s))$ *для каждой из схем ij определяются из (7.1)—(7.5) соответственно при* $s = s + a_k - a_k \bar{\pi}_{kk}(s)$.

Доказательство. ◑ Докажем (7.1) и (7.2). Прежде всего можно показать, что если обслуживание вызова приоритета k длилось больше чем θ_k, то ф. р. остаточной длительности обслуживания имеет вид

$$\frac{B_k(\theta_k + x) - B_k(\theta_k)}{1 - B_k(\theta_k)}.$$

Далее, введем дополнительное событие и установим справедливость следующих выражений.

Для схем $1j$

$$h_k(s)=\int_0^{\theta_k} e^{-(s+\sigma_{k-1}[1-\pi_{k-1}(s)\nu_k(s)])x}\,dB_k(x)+$$

$$+e^{-(s+\sigma_{k-1}[1-\pi_{k-1}(s)\nu_k(s)])\theta_k}[1-B_k(\theta_k)]\times$$

$$\times\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{\infty} e^{-sx}\frac{(\sigma_{k-1}x)^n}{n!}e^{-\sigma_{k-1}x}\frac{dB_k(\theta_k+x)}{1-B_k(\theta_k)}[\bar{\pi}_{k-1}(s)]^n.$$

для схемы $2j$

$$h_k(s)=\int_0^{\theta_k} e^{-(s+\sigma_{k-1})x}\,dB_k(x)+\int_0^{\theta_k} e^{-sx}[1-B_k(x)]\times$$

$$\times e^{-\sigma_{k-1}x}\sigma_{k-1}dx\pi_{k-1}(s)\nu_k(s)h(s)+e^{-(s+\sigma_{k-1})\theta_k}[1-B_k(\theta_k)]\times$$

$$\times\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{\infty} e^{-sx}\frac{(\sigma_{k-1}x)^n}{n!}e^{-\sigma_{k-1}x}\frac{dB_k(\theta_k+x)}{1-B_k(\theta_k)}[\bar{\pi}_{k-1}(s)]^n.$$

Откуда, произведя суммирование и интегрирование, получаем (7.1) и (7.2). Соотношения (7.6) и (7.7) доказаны в [7], (7.8) и (7.9) получены в гл. 4. Они справедливы и для системы со смешанным приоритетом. ◐

Из полученных выражений можно находить числовые характеристики обслуживания. Приведем первые моменты k-цикла ориентации, k-цикла обслуживания, $\bar{\Pi}_k$-периода, $\bar{\Pi}_{kk}$-периода, Π_k-периода и Π_{kk}-периода, например, для схем $1j$. Положим

$$\rho_k=\sum_{i=1}^{k} a_i b_i,\ \text{где}\ b_1=(\beta_{11}+c_{11})/(1+a_1c_{11}),$$

$$b_i=\beta_{i1}+\left[\theta_i-\int_0^{\theta_i} B_i\,dx\right][\Phi_{i-1}\ldots\Phi_2(1+a_1c_{11})q_i-1],$$

$$\Phi_1=1,\ \Phi_i=1+\frac{\sigma_{i-1}\pi_{i-1}(a_i)}{\sigma_{i-1}}[q_i-1]\quad(i=\overline{2,k}).$$

Участвующие выше q_i равны

для схемы 1.1 $q_i = 1/c_i(\sigma_{i-1})$;

для схемы 1.2 $q_i = 1 + \sigma_i c_{i1}$;

для схемы 1.3 $q_i = 1/c_i(-\sigma_{i-1})$.

Если $\rho_k < 1$, то первые моменты k-цикла ориентации, k-цикла обслуживания, $\overline{\Pi}_{kk}$-периода, $\overline{\Pi}_k$-периода, Π_{kk}-периода и Π_k-периода соответственно равны

$$\nu_{k1} = \frac{1}{\sigma_{k-1}}[q_i - 1]\frac{\Phi_{k-1}\ldots\Phi_2(1 + a_1c_{11})}{1-\rho_{k-1}},$$

$$h_{k1} = \frac{b_k}{1-\rho_{k-1}}, \quad \overline{\pi}_{kk1} = \frac{b_k}{1-\rho_k}, \quad \sigma_k\overline{\pi}_{k1} = \frac{\rho_k}{1-\rho_k},$$

$$\pi_{kk1} = \left[b_k + \Phi_{k-1}\ldots\Phi_2\frac{q_{k-1}}{\sigma_{k-1}}\right]\frac{1}{1-\rho_k},$$

$$\sigma_k\pi_{k1} = \frac{\Phi_k\ldots\Phi_2(1 + a_1c_{11}) + \rho_k - 1}{1-\rho_k}.$$

§ 5

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОЧЕРЕДИ

Лемма 7.2. *Для схем 1j*

$$h_k(z, s) = z_k[1 + \sigma_{k-1}(\pi_{k-1}(z, s) + \pi_{k-1}(s + [\ ]_k)\nu_k(z, s))] \times$$
$$\times \int_0^{\theta_k}[1 - B_k(x)]\,e^{-\eta_k(s,z)x}\,dx + z_k(1 + \sigma_{k-1}\overline{\pi}_{k-1}(z, s)) \times$$
$$\times e^{-[\eta_k(s,z)-\xi_k(s,z)]\theta_k}\int_{\theta_k}^{\infty}[1 - B_k(x)]\,e^{-\xi_k(s,z)x}\,dx, \qquad (7.10)$$

для схем 2j

$$h_k(z, s) = \Big\{z_k[1 + \sigma_{k-1}(\pi_{k-1}(z,s) + \pi_{k-1}(s + [\ ]_k)\nu_k(z,s))] \times$$
$$\times \int_0^{\theta_k}[1 - B_k(x)]\,e^{-(s+\sigma_{k-1}+[\ ]_k)x}\,dx + z_k(1 + \sigma_{k-1}\overline{\pi}_{k-1}(z, s) \times$$
$$\times e^{-[\eta_k(s,z)-\xi_k(s,z)]\theta_k}\int_{\theta_k}^{\infty}[1 - B_k(x)]\,e^{-\xi_k(s,z)x}\,dx\Big\} \times$$

$$\times\left\{1-\sigma_{k-1}\pi_{k-1}(s+[\ ]_k)\int\limits_0^{\theta_k}[1-B_k(x)]e^{-(s+\sigma_{k-1}+[\ ]_k)x}dx\right\}^{-1},\qquad(7.11)$$

где $[\ ]_k=[\sigma-az]_k$,

$$\xi_k(s,z)=s+[\ ]_k+\sigma_{k-1}[1-\bar{\pi}_{k-1}(s+[\ ]_k)],\qquad(7.12)$$

$$\eta_k(s,z)=s+[\ ]_k-\sigma_{k-1}[1-\pi_{k-1}(s+[\ ]_k\nu_k(s+[\ ]_k)];\qquad(7.13)$$

$\nu_k(z,\bar{s})$ *для каждой из схем соответственно равно: для схем i1*

$$\nu_k(z,s)=\frac{[1-c_k(s+[\ ]_k)+\sigma_{k-1}[1+\sigma_{k-1}\pi_{k-1}(z,s)]}{s+[\ ]_k+\sigma_{k-1}[1-c_k(s+[\ ]_k+\sigma_{k-1})]\ \pi_{k-1}(s+[\ ]_k)};\qquad(7.14)$$

для схем i2

$$\nu_k(z,s)=(1+\sigma_{k-1}\pi_{k-1}(z,s))\times$$

$$\times\frac{1-c_k(s+[\ ]_k+\sigma_{k-1}[1-\pi_{k-1}(s+[\ ]_k)])}{s+[\ ]_k+\sigma_{k-1}[1-\pi_{k-1}(s+[\ ]_k)]};\qquad(7.15)$$

для схем i3

$$\nu_k(z,s)=[1+\sigma_{k-1}\pi_{k-1}(z,s)]\times$$

$$\times\int\limits_0^{\infty}\frac{\{1-e^{-(s+[\ ]_k+\sigma_{k-1})x}\}\,dC_k(x)}{s+[\ ]_k+\sigma_{k-1}-\sigma_{k-1}\pi_{k-1}(s+[\ ]_k)[1-e^{-(s+[\ ]_k+\sigma_{k-1})x}]};\qquad(7.16)$$

$\nu_k(s+[\ ]_k)$, $\pi_{k-1}(s+[\ ]_k)$, $\bar{\pi}_{k-1}(s+[\ ]_k)$ *определяются из* (7.3)—(7.5) *и* (7.6)—(7.9) *при* $s=s+[\ ]_k$, *а* $\pi_{k-1}(z,s)$ *и* $\bar{\pi}_{k-1}(z,s)$ *рекуррентно из нижеследующих формул.*

Теорема 7.2.

$$p(z,s)=\frac{1+\sigma\pi(z,s)}{s+\sigma-\sigma\pi(s)},\qquad(7.17)$$

$\sigma\pi(z,s)=\sigma_r\pi_r(z,s)$ *определяется рекуррентно из выражения*

$$\sigma_k\pi_k(z,s)=\sigma_{k-1}\pi_{k-1}(z,s)+\gamma_{k-1}(s,z)\nu_k(z,s)+$$

$$+\frac{h_k(z, s)}{z_k-h_k(s+[\ ]_k)}[\gamma_{k-1}(s, z)\nu_k(s+[\ ]_k)\times$$

$$+\sigma_{k-1}\pi_{k-1}(s+a_k)-\sigma\pi_k(s)], \qquad (7.18)$$

где

$$\gamma_{k-1}(z, s)=\sigma_{k-1}[\pi_{k-1}(s+[\ ]_k)-\pi_{k-1}(s+a_k)]+a_k z_k;$$

$$\sigma_k\bar{\pi}_k(z, s)=\sigma_{k-1}\pi_{k-1}(z, s)+h_k(z, s)\frac{\xi_k(s, z)-\xi_{k-1}(s,z)}{z_k-h_k(s+[\ ]_k)}, \qquad (7.19)$$

а $\sigma\pi(s)=\sigma_r\pi_r(s)$ *определяется из формул теоремы 7.1.*

Доказательство. ◑ Произвольный вызов объявляется красным (синим) с вероятностью $z_k(1-z_k)$, если он является вызовом приоритета $k(k=\overline{1, r})$ независимо от цвета остальных вызовов. Тогда $sp(z, s)$ интерпретируется как вероятность того, что первая «катастрофа» произошла в момент, когда в системе нет синих вызовов. Аналогично $sh_k(z, s)$ можно интерпретировать как вероятность того, что первая «катастрофа» произошла на отдельном k-цикле обслуживания в момент, когда в системе нет синих вызовов. Исходя из этого вероятностного смысла и строения k-цикла обслуживания, обычными вероятностными рассуждениями, присущими методу введения дополнительного события, доказываются следующие выражения.

Для схем $1j$

$$sh_k(z, s)=z_k\int_0^{\theta_k}[1-B_k(x)]e^{-[\ ]_k x}\times$$

$$\times e^{-\sigma_{k-1}[1-\pi_{k-1}(s+[\ ]_k)\nu_k(s+[\ ]_k)]x}se^{-sx}dx+$$

$$+z_k\int_0^{\theta_k}[1-B_k(x)]e^{-[\ ]_k x}e^{-\sigma_{k-1}[1-\pi_{k-1}(s+[\ ]_k)\nu_k(s+[\ ]_k)]x}\times$$

$$\times e^{-sx}\sigma_{k-1}dx\, s\pi_{k-1}(z, s)+$$

$$+z_k\int_0^{\theta_k}[1-B_k(x)]e^{-[\ ]_k x}e^{-\sigma_{k-1}[1-\pi_{k-1}(s+[\ ]_k)\nu_k(s+[\ ]_k)]x}\times$$

$$\times e^{-sx}\sigma_{k-1}\,dx\,\pi_{k-1}(s+[\ ]_k)\,s\nu_k(z,s)+$$

$$+z_k e^{-(s+\sigma_{k-1}[1-\pi_{k-1}(s+[\ ]_k)\nu_k(s+[\ ]_k)]\theta_k}[1-B_k(\theta_k)]\times$$

$$\times\int_0^\infty\frac{1-B_k(\theta_k+x)}{1-B_k(\theta_k)}e^{-[\ ]_k x}e^{-\sigma_{k-1}}[1-\bar{\pi}_{k-1}(s+[\ ]_k)]\times$$

$$\times xe^{-sx}s\,dx+z_k e^{-(s+\sigma_{k-1}[1-\pi_{k-1}(s+[\ ]_k)\nu_k(s+[\ ]_k)]\theta_k}\times$$

$$\times[1-B_k(\theta_k)]\int_0^\infty e^{-sx}\frac{1-B_k(\theta_k+x)}{1-B_k(\theta_k)}e^{-[\ ]_k x}\times$$

$$\times e^{-\sigma_{k-1}[1-\pi_{k-1}(s+[\ ]_k)]x}s\,dx\,\bar{\pi}_{k-1}(z,s);$$

для схем $2j$

$$sh_k(z,s)=z_k\int_0^{\theta_k}[1-B_k(x)]e^{-\sigma_{k-1}x}e^{-[\ ]_k x}e^{-sx}s\,dx+$$

$$+z_k\int_0^{\theta_k}e^{-sx}[1-B_k(x)]e^{-[\ ]_k x}e^{-\sigma_{k-1}x}\sigma_{k-1}dx\,s\pi_{k-1}(z,s)+$$

$$+z_k\int_0^{\theta_k}e^{-sx}[1-B_k(x)]e^{-[\ ]_k x}e^{-\sigma_{k-1}x}\sigma_{k-1}\,dx\times$$

$$\times\pi_{k-1}(s+[\ ]_k)\,s\nu_k(z,s)+\int_0^{\theta_k}e^{-sx}[1-B_k(x)]e^{-[\ ]_k x}\times$$

$$\times e^{-\sigma_{k-1}(x)}\sigma_{k-1}\,dx\,\pi_{k-1}(s+[\ ]_k)\,\nu_k(s+[\ ]_k)\times$$

$$\times sh_k(z,s)+z_k e^{-(s+\sigma_{k-1}[1-\pi_{k-1}(s+[\ ]_k)\nu_k(s+[\ ]_k)])\theta_k}\times$$

$$\times[1-B_k(\theta_k)]\cdot\int_0^\infty\frac{1-B_k(\theta_k+x)}{1-B_k(\theta_k)}e^{-[\ ]_k x}\times$$

$$\times e^{-\sigma_{k-1}[1-\bar{\pi}_{k-1}(s+[\ ]_k)]x}se^{-sx}\,dx+$$

$$+z_k e^{-(s+\sigma_{k-1}[1-\pi_{k-1}(s+[\ ]_k)\nu_k(s+[\ ]_k)])\theta_k}[1-B_k(\theta_k)]\times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{1 - B_k(\theta_k + x)}{1 - B_k(\theta)_k} e^{-[\ ]_k x} e^{-\sigma_{k-1}[1-\pi_{k-1}(s+[\ ]_k)]x} \times$$

$$\times e^{-sx} \sigma_{k-1}\, dx\, s\, \bar{\pi}_{k-1}(z, s).$$

Из приведенных соотношений после интегрирования с учетом обозначений (7.12) и (7.13) следует (7.10) и (7.11). Формулы (7.14)—(7.18) получены в гл. 4 и справедливы и для данной системы, (7.19) доказаны в [7]. ◐

Пусть через $P(z)$ обозначена производящая функция совместного распределения длины очереди в стационарном режиме. Тогда при $\rho_k < 1$

$$P(z) = \frac{(1 + \sigma \hat{\pi}(z))}{(1 + \sigma\pi_1)},$$

где $\sigma\hat{\pi}(z) = \sigma_r \pi_r(z, 0)$, $\sigma\pi_1 = \sigma\pi_{r1}$.

Дополнение 1

§ 1

КЛАССИФИКАТОР ПРИОРИТЕТНЫХ СИСТЕМ С ОРИЕНТАЦИЕЙ

Структура приоритетной СМО определяется заданием значений трех идентификаторов: «приоритет», «ориентация», «надежность». В табл. 3 приведены значения этих идентификаторов. Поиск местонахождения результатов в таблице результатов облегчается табл. 4. Результаты предлагаются в терминах преобразований Лапласа и производящих функций.

Для записи основных результатов приняты следующие обозначения:

$\Pi(t)$ — распределение периода занятости,

$L(t)$ — совместное распределение длины очереди,

$\mathscr{P}(t)$ — вероятности состояния прибора.

Запись типа $L(t)$: 2.1, 5—7, 13; 1.1, 3; 3.11 означает, что $L(t)$ определяется из формул (2.1), (2.5)—(2.7), (1.1), (1.3) и (3.11) таблицы основных результатов.

Таблица 3

Значения идентификаторов, определяющих приоритетную СМО

Надежность	обс-е прерв. вызова	порядок обсл-я	«0» — прерванный вызов обслуживается после освобождения от вызовов высшего приоритета «1» — прерванный вызов обслуживается после восстановления прибора
		время обслуживания	«1» — дообслуживается «2» — обслуживается заново с новой реализацией «3» — обслуживается заново с прежней реализацией «4» — прерванный вызов теряется
			«—» — система работает надежно «+» — система работает ненадежно
Ориентация	тип ориентации	после прерывания	«—» — без прерывания «1» — доориентируется «2» — ориентируется заново с новой реализацией «3» — ориентируется заново с прежней реализацией
		в свободном состоянии	«1» — жди и смотри «2» — смотри вперед «3» — жди наивероятного «4» — сброс в нуль «5» — разогрев
			«—» — система без ориентации «+» — система с ориентацией
Приоритет	время обсл-я прерванного вызова		«—» — без прерывания «1» — дообслуживается «2» — обслуживается заново с новой реализацией «3» — обслуживается заново с прежней реализацией «4» — прерванный вызов теряется
	тип приоритета		«*A*» — абсолютный приоритет (*Absolute*) «*R*» — относительный приоритет (*Relative*) «*M*» — смешанный приоритет, т. е. прерывание допускается через квант времени обслуживания (*Mixed*) «*C*» — циклический приоритет (*Cycle*), а также «*AR*», «*RA*», «*AM*», «*ARA*», ...

Таблица 4

Приоритет		Ориентация			Надежность		Место в таблице результатов	Место в книге
AA	1	+	2	1	—		$\Pi(t)$: 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20, 27, 30; $L(t)$: 2. 5—8, 26—28, 38, 39, 42; 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20, 27, 30; 3. 11 $j\mathcal{P}(t)$: 3. 1, 5—11, 20—23, 27—29; 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20, 27, 30;	гл. 1, § 2, 3, 5 гл. 3, § 2—4, 6, 7 гл. 5, § 4, 6, 7
AA	1	+	2	2	—		$\Pi(t)$: 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20, 27, 29; $L(t)$: 2. 1, 5—8, 26—28, 38, 39, 41; 1. 1, 7, 8, 13, 20, 27, 29; 3. 11, $j\mathcal{P}(t)$: 3. 1, 5—11, 20—23, 24—26; 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20, 27, 29;	гл. 1, § 2, 3, 5 гл. 3, § 2—4, 6, 7 гл. 5, § 4, 6, 7
AA	1	+	2	3	—		$\Pi(t)$: 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20, 27, 31; $L(t)$: 2. 1, 5—8, 26—28, 38, 39, 43; 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20, 27, 31; 3. 11;	гл. 1, § 2, 3, 5 гл. 3, § 2—4, 6, 7
AA	2	+	2	1	—		$\Pi(t)$: 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20, 25, 30; $L(t)$: 2. 1, 5—8, 26—28, 36, 42; 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20, 25, 30; 3. 11; $j\mathcal{P}(t)$: 3. 1, 5—11, 12—15, 27—29; 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20, 25, 30;	гл. 1, § 2, 3, 5 гл. 3, § 2—4, 6, 7 гл. 5, § 4, 6, 7

Продолжение табл. 4

Приоритет		Ориентация			Надежность			Место в таблице результатов	Место в книге
AA	2	+	2	2	—			П (t): 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20, 25, 29; L (t): 2. 1, 5—8, 26—28, 36, 41; 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20, 25, 29; 3. 11; $j\mathcal{P}$ (t): 3. 1, 5—11, 12—15, 24—26; 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20, 25, 29;	гл. 1, § 2, 3, 5 гл. 3, § 2—4, 6, 7 гл. 5, § 4, 6, 7
AA	2	+	2	3	—			П (t): 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20, 25, 31; L (t): 2. 1, 5—8, 26—28, 36, 43; 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20, 25, 31; 3. 11;	гл. 1, § 2, 3, 5 гл. 3, § 2—4, 6, 7
AA	3	+	2	1	—			П (t): 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20, 28, 30; L (t): 2. 1, 5—8, 26—28, 40, 42; 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20, 28, 30; 3. 11;	гл. 1, § 2, 3, 5 гл. 3, § 2—4, 6, 7
AA	3	+	2	2	—			П (t): 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20, 28, 29; L (t): 2. 1, 5—8, 26—28, 40, 41; 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20; 28, 29; 3: 11;	гл. 1, § 2, 3, 5 гл. 3, § 2—4, 6, 7
AA	3	+	2	3	—			П (t): 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20, 28, 31; L (t): 2. 1, 5—8, 26—28, 40, 43; 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20, 28, 31; 3. 11;	гл. 1, § 2, 3, 5 гл. 3, § 2—4, 6, 7

Продолжение табл. 4

Приоритет		Ориентация			Надежность			Место в таблице результатов	Место в книге
AA	4	+	2	1	—			П(t): 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20, 26, 30; L(t): 2. 1, 5—8, 26—28, 37, 42; 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20, 26, 30; 3. 11; $j\mathcal{P}$(t): 3. 1, 5—11, 16—19, 27—29; 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20, 26, 30;	гл. 1, § 2, 3, 5 гл. 3, § 2—4, 6, 7 гл. 5, § 4, 6, 7
AA	4	+	2	2	—			П(t): 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20, 26, 29; L(t): 2. 1, 5—8, 26—28, 37, 41; 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20, 26, 29; 3. 11; $j\mathcal{P}$(t): 3. 1, 5—11, 16—19, 24—26; 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20, 26, 29;	гл. 1, § 2, 3, 5 гл. 3, § 2—4, 6, 7 гл. 5, § 4, 6, 7
AA	4	+	2	3	—			П(t): 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20, 26, 31; L(t): 2. 1, 5—8, 26—28, 37, 43; 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20, 26, 31; 3. 11;	гл. 1, § 2, 3, 5 гл. 3, § 2—4, 6, 7
AR	1	+	2	—	—			П(t): 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20, 27, 32; L(t): 2. 1, 5—8, 26—28, 38, 39, 44—46; 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20, 27, 32; 3. 11;	гл. 1, § 2, 3, 5 гл. 3, § 2—4, 6, 7

Продолжение табл. 4

Приоритет		Ориентация			Надежность			Место в таблице результатов	Место в книге
AR	2	+	2	—	—			П(*t*): 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20, 25, 32; *L*(*t*): 2. 1, 5—8, 26—28, 36, 44—46; 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20, 25, 32; 3. 11;	гл. 1, § 2, 3, 5 гл. 3, § 2—4, 6, 7
AR	3	+	2	—	—			П(*t*): 1. 1, 7, 8, 13, 19, 28, 32; *L*(*t*): 2. 1, 5—8, 26—28, 40, 44—46; 1. 1, 7, 8, 13, 19, 28, 32; 3. 11;	гл. 1, § 2, 3, 5 гл. 3, § 2—4, 6, 7
AR	4	+	2	—	—			П(*t*): 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20, 26, 32; *L*(*t*): 2. 1, 5—8, 26—28, 37, 44—46; 1. 1, 7, 8, 13, 19, 20, 26, 32; 1. 11;	гл. 1, § 2, 3, 5 гл. 3, § 2—4, 6, 7
RA	—	+	2	1	—			П(*t*): 1. 1, 9, 10, 15, 16, 19, 21, 23, 24, 30; *L*(*t*): 2. 1, 14, 15, 6, 8, 23, 24, 33, 34, 30, 27, 28, 35, 42; 1. 1, 9, 10, 15, 16, 19, 21, 23, 24, 30;	гл. 2, § 2, 4, 5 гл. 4, § 1, 3, 4
RA	—	+	2	2	—			П(*t*): 1. 1, 9, 10, 15, 16, 19, 21, 23, 24, 29; *L*(*t*): 2. 1, 14, 15, 6, 8, 23, 24, 33, 34, 30, 27, 28, 35, 41; 1. 1, 9, 10, 15, 16, 19, 21, 23, 24, 29;	гл. 2, § 2, 4, 5 гл. 4, § 1, 3, 4

Продолжение табл. 4

Приоритет		Ориентация			Надежность			Место в таблице результатов	Место в книге
RA	—	+	2	3	—			П (t): 1. 1, 9, 10, 15, 16, 19, 21, 23, 24, 31; L (t): 2.1, 14, 15, 6, 8, 23, 24, 33, 34, 30, 27, 28, 35, 43; 1. 1, 9, 10, 15, 16, 19, 21, 23, 24, 31;	гл. 2, § 2, 4, 5 гл. 4, § 1, 3, 4
RR	—	+	2	—	—			П (t): 1. 1, 9, 10, 15, 16, 19, 21, 23, 24, 32; L (t): 2.1, 14, 15, 6, 8, 23, 24, 33, 34, 30, 27, 28, 35, 44—46; 1. 1, 9, 10, 15, 16, 19, 21, 23, 24, 32;	гл. 2, § 2, 4, 5 гл. 4, § 1, 3, 4
AA	1	+	3	1	—			П (t): 1. 2, 7, 8, 11, 13, 18—20, 27, 30; L (t): 2. 4—12, 20, 38, 39, 42; 1. 18—20, 13, 27, 30;	гл. 1, § 2, 3, 6 гл. 3, § 2—4, 6, 8
AA	1	+	3	2	—			П (t): 1. 2, 7, 8, 11, 13, 18—20, 27, 29; L (t): 2. 4—12, 20, 38, 39, 41; 1. 18—20, 13, 27, 29;	гл. 1, § 2, 3, 6 гл. 3, § 2—4, 6, 8
AA	1	+	3	3	—			П (t): 1. 2, 7, 8, 11, 13, 18—20, 27, 31; L (t): 2. 4—12, 20, 38, 39; 43; 1. 18—20, 13, 27, 31;	гл. 1, § 2, 3, 6 гл. 3, § 2—4, 6, 8
AA	2	+	3	1	—			П (t): 1. 2, 7, 8, 11, 13, 18—20, 25, 30; L (t): 2. 4—12, 20, 36, 42; 1. 18—20, 13, 25, 30;	гл. 1, § 2, 3, 6 гл. 3 § 2—4, 6, 8

Приоритет		Ориентация			Надежность			Место в таблице результатов	Место в книге
AA	2	+	3	2	—			П (*t*): 1. 2, 7, 8, 11, 13, 18—20, 25, 29; *L* (*t*): 2. 4—12, 20, 36, 41; 1. 18—20, 13, 25, 29;	гл. 1, § 2, 3, 6 гл. 3, § 2—4, 6, 8
AA	2	+	3	3	—			П (*t*): 1. 2, 7, 8, 11, 13, 18—20, 25, 31; *L* (*t*): 2. 4—12, 20, 36, 43; 1. 18—20, 13, 25, 31;	гл. 1, § 2, 3, 6 гл. 3, § 2—4, 6, 8
AA	3	+	3	1	—			П (*t*): 1. 2, 7, 8, 11, 13, 18—20, 28, 30; *L* (*t*): 2. 4—12, 20, 40, 42; 1. 18—20, 13, 28, 30;	гл. 1, § 2, 3, 6 гл. 3, § 2—4, 6, 8
AA	3	+	3	2	—			П (*t*): 1. 2, 7, 8, 11, 13, 18—20, 28, 29; *L* (*t*): 2. 4—12, 20, 40, 41; 1. 18—20, 13, 28, 29;	гл. 1, § 2, 3, 6 гл. 3, § 2—4, 6, 8
AA	3	+	3	3	—			П (*t*): 1. 2, 7, 8, 11, 13, 18—20, 28, 31; *L* (*t*): 2. 4—12, 20, 40, 43; 1. 18—20, 13, 28, 31;	гл. 1, § 2, 3, 6 гл. 3, § 2—4, 6, 8
AA	4	+	3	1	—			П (*t*): 1. 2, 7, 8, 11, 13, 18—20, 26, 30; *L* (*t*): 2. 4—12, 20, 37, 42; 1. 18—20, 13, 26, 30;	гл. 1, § 2, 3, 6 гл. 3, § 2—4, 6, 8

Продолжение табл. 4

Прио-ритет		Ориентация			Надеж-ность			Место в таблице результатов	Место в книге
AA	4	+	3	2	—			П (*t*): 1. 2, 7, 8, 11, 13, 18—20, 26, 29; *L* (*t*): 2. 4—12, 20, 37, 41; 1. 18—20, 13, 26, 29;	гл. 1, § 2, 3, 6 гл. 3, § 2—4, 6, 8
AA	4	+	3	3	—			П (*t*): 1. 2, 7, 8, 11, 13, 18—20, 26, 31; *L* (*t*): 2. 4—12, 20, 37, 43; 1. 18—20, 13, 26, 31;	гл. 1, § 2, 3, 6 гл. 3, § 2—4, 6, 8
AR	1	+	3	—	—			П (*t*): 1. 2, 7, 8, 11, 13, 18, 20, 27, 32; *L* (*t*): 2. 4—12, 20, 38, 39, 44—46; 1. 18—20, 13, 27, 32;	гл. 1, § 2, 3, 6 гл. 3, § 2—4, 6, 8
AR	2	+	3	—	—			П (*t*): 1. 2, 7, 8, 11, 13, 18—20, 25, 32; *L* (*t*): 2. 4—12, 20, 36, 44—46; 1. 18—20, 13, 25, 32;	гл. 1, § 2, 3, 6 гл. 3, § 2—4, 6, 8
AR	3	+	3	—	—			П (*t*): 1. 2, 7, 8, 11, 13, 18—20, 28, 32; *L* (*t*): 2. 4—12, 20, 40, 44—46; 1. 18—20, 28, 32;	гл. 1, § 2, 3, 6 гл. 3, § 2—4, 6, 8
AR	4	+	3	—	—			П (*t*): 1. 2, 7, 8, 11, 13, 18—20, 26, 32; *L* (*t*): 2. 4—12, 20, 37, 44—46; 1. 18—20, 13, 26, 32;	гл. 1, § 2, 3, 6 гл. 3, § 2—4, 6, 8

Продолжение табл. 4

Приоритет		Ориентация			Надежность			Место в таблице результатов	Место в книге
RA	—	+	3	1	—			П (t): 1. 2, 9, 10, 15—19, 21—24, 30; L (t): 2. 4, 14—20, 8, 6, 12, 23—25, 30, 31, 33—35, 27, 28, 42; 1. 15—19, 21—24, 30;	гл. 2, § 2, 4, 5 гл. 4, § 1, 3, 4
RA	—	+	3	2	—			П (t): 1. 2, 9, 10, 15—19, 21—24, 29; L (t): 2. 4, 14—20, 8, 6, 12, 23—25, 30, 31, 33, 34, 27, 28, 35, 41; 1. 15—19, 21—24, 29;	гл. 2, § 2, 4, 5 гл. 4, § 1, 3, 4
RA	—	+	3	3	—			П (t): 1. 2, 9, 10, 15—19, 21—24, 31; L (t): 2. 4, 14—20, 8, 6, 12, 23—25, 30, 31, 33, 34, 27, 28, 35, 43; 1. 15—19, 21—24, 31;	гл. 2, § 2, 4, 5 гл. 4, § 1, 3, 4
RR	—	+	3	—	—			П (t): 1. 2, 9, 10, 15—19, 21—24, 32; L (t): 2. 4, 14—20, 8, 6, 12, 23—25, 30, 31, 33, 34, 27, 28, 35, 44—46; 1. 15—19, 21—24, 32;	гл. 2, § 2, 4, 5 гл. 4, § 1, 3, 4
AA	1	+	4	1	—			П (t): 4. 1—4, 7, 10; L (t): 4. 12—14, 17, 20; 4. 1—4, 7, 10;	гл. 6, § 3, 4 гл. 6, § 5

Продолжение табл. 4

Приоритет		Ориентация			Надежность			Место в таблице результатов	Место в книге
AA	1	+	4	1	—			$j\mathcal{P}(t)$: 3. 1—5, 20—23, 27—29; 1. 1, 3, 4, 13, 18, 19, 27, 30; 2. 7;	гл. 5, § 4, 5
AA	1	+	4	2	—			П (t): 4. 1—4, 7, 9; $L(t)$: 4. 12—14, 17, 19; 4. 1—4, 7, 9; $j\mathcal{P}(t)$: 3. 1—5, 20—23, 24—26; 1. 1, 3, 4, 13, 18, 19, 27, 29; 2. 7;	гл. 6, § 3, 4 гл. 6, § 5 гл. 5, § 4, 5
AA	1	+	4	3	—			П (t): 4. 1—4, 7, 11; $L(t)$: 4. 12—14, 17, 21;	гл. 6, § 3, 4 гл. 6, § 5
AA	2	+	4	1	—			П (t): 4. 1—5, 10, $L(t)$: 4. 12—15, 20; 4. 1—5, 10; $j\mathcal{P}(t)$: 3. 1—5, 12—15, 27—29; 1. 1, 3, 4, 13, 18, 19, 25, 30; 2. 7;	гл. 6, § 3, 4 гл. 6 § 5 гл. 5, § 4, 5
AA	2	+	4	2	—			П (t): 4. 1—5, 9; $L(t)$: 4. 12—15, 19; 4. 1—5; 9; $j\mathcal{P}(t)$: 3. 1—5; 12—15, 24—26; 1. 1, 3, 4, 13, 18, 19, 25, 29; 2. 7;	гл. 7, § 3, 4 гл. 6, § 5 гл. 5, § 4, 5
AA	2	+	4	3	—			П (t): 4. 1—5, 11; $L(t)$: 4. 12—15, 21; 4. 1—5, 11;	гл. 6, § 3, 4 гл. 6, § 5
AA	3	+	4	1	—			П (t): 4. 1—4, 8, 10; $L(t)$: 4. 12—14, 18, 20; 4. 1—4, 8, 10;	гл. 6, § 3, 4 гл. 6, § 5
AA	3	+	4	2	—			П (t): 4. 1—4, 8, 9; $L(t)$: 4. 12—14, 18, 19; 4. 1—4, 8, 9;	гл. 6, § 3, 4 гл. 6, § 5

Продолжение табл. 4

Приоритет		Ориентация			Надежность			Место в таблице результатов	Место в книге
AA	3	+	4	3	—			П (t): 4. 1—4, 8, 11; $L(t)$: 4. 12—14, 18, 21; 4. 1—4, 8, 11;	гл. 6, § 3, 4 гл. 6, § 5
AA	4	+	4	1	—			П (t): 4. 1—4, 6, 10; $L(t)$: 4. 12—14, 16, 20; 4. 1—4, 6, 10; $j\mathcal{P}(t)$: 3. 1—5, 16—19, 27—29; 1. 1, 3, 4, 13, 18, 19, 26, 30; 2. 7;	гл. 6, § 3, 4 гл. 6, § 5 гл. 5, § 4, 5
AA	4	+	4	2	—			П (t): 4. 1—4, 6, 9; $L(t)$: 4. 12—14, 16, 19; 4. 1—4, 6, 9; $j\mathcal{P}(t)$: 3. 1—5, 16—19, 24—26; 1. 1, 3, 4, 13, 18, 19, 26, 29, 2, 7;	гл. 6, § 3, 4 гл. 6, § 5 гл. 5, § 4, 5
AA	4	+	4	3	—			П (t): 4. 1—4, 6, 11; $L(t)$: 4. 12—14, 16, 21; 4. 1—4, 6, 11;	гл. 6, § 3, 4 гл. 6, § 5
AR	1	+	4	—	—			П (t): 1. 1, 3, 4, 13, 18, 19, 27, 32; $L(t)$: 2. 1—3, 20, 38, 39, 44—46; 1. 1, 3, 4, 13, 18, 19, 27, 32;	гл. 1, § 2—4 гл. 3, § 2—5
AR	2	+	4	—	—			П (t): 1. 1, 3, 4, 13, 18, 19, 25, 32; $L(t)$: 2. 1—3, 20, 36, 44—46; 1. 1, 3, 4, 13, 18, 19, 25, 32;	гл. 1, § 2—4 гл. 3, § 2—5

Приоритет		Ориентация			Надежность			Место в таблице результатов	Место в книге
AR	3	+	4	—	—			П (*t*): 1. 1, 3, 4, 13, 18, 19, 28, 32; *L* (*t*): 2. 1—3, 20, 40, 44—46; 1. 1, 3, 4, 13, 18, 19, 28, 32;	гл. 1, § 2—4 гл. 3, § 2—5
AR	4	+	4	—	—			П (*t*): 1. 1, 3, 4, 13, 18, 19, 26, 32; *L* (*t*): 2. 1—3, 20, 37, 44—46; 1. 1, 3, 4, 13, 18, 19, 26, 32;	гл. 1, § 2—4 гл. 3, § 2—5
RA	—	+	4	1	—			П (*t*): 1. 1, 5, 6, 14, 15, 18, 19, 24, 30; *L* (*t*): 2. 1, 13, 3, 20—22, 35, 42; 1. 1, 5, 6, 14, 15, 18, 19, 24, 30;	гл. 2, § 2, 3 гл. 4, § 1, 2
RA	—	+	4	2	—			П (*t*): 1. 1, 5, 6, 14, 15, 18, 19, 24, 29; *L* (*t*): 2. 1, 13, 3, 20—22, 35, 41; 1. 1, 5, 6, 14, 15, 18, 19, 24, 29;	гл. 2, § 2, 3 гл. 4, § 1, 2
RA	—	+	4	3	—			П (*t*): 1. 1, 5, 6, 14, 15, 18, 19, 24, 31; *L* (*t*): 2. 1, 13, 3, 20—22, 35, 43; 1. 1, 5, 6, 14, 15, 18, 19, 24, 31;	гл. 2, § 2, 3 гл. 4, § 1, 2
RR	—	+	4	—	—			П (*t*): 1. 1, 5, 6, 14, 15, 18, 19, 24, 32; *L* (*t*): 2. 1, 13, 3, 20—22, 35, 44—46; 1. 1, 5, 6, 14, 15, 18, 19, 24, 32;	гл. 2, § 2, 3 гл. 4, § 1, 2

Продолжение табл. 4

Прио-ритет		Ориентация			Надеж-ность		Место в таблице результатов	Место в книге
$\mathcal{M}^*R$	1	+	0**	1	—		П(*t*): 4. 1—4, 22, 23, 10; *L*(*t*): 4. 12—14, 25, 26, 28; 29, 20; 4. 1—4, 22, 23, 10;	гл. 7, § 4 гл. 7, § 5
$\mathcal{M}R$	1	+	0	2	—		П(*t*): 4. 1—4, 22, 23, 9; *L*(*t*): 4. 12—14, 25, 26, 28, 29, 19; 4. 1—4, 22, 23, 9;	гл. 7, § 4 гл. 7, § 5
$\mathcal{M}R$	1	+	0	3	—		П(*t*): 4. 1—4, 22, 23, 11; *L*(*t*): 4. 12—14, 25, 26, 28, 29, 21; 4. 1—4, 22, 23, 11;	гл. 7, § 4 гл. 7, § 5
$\mathcal{M}R$	2	+	0	1	—		П(*t*): 4. 1—4, 22, 24, 10; *L*(*t*): 4. 12—14, 25, 27—29, 20; 4. 1—4, 22, 24, 10;	гл. 7, § 4 гл. 7, § 5
$\mathcal{M}R$	2	+	0	2	—		П(*t*): 4. 1—4, 22, 24, 9; *L*(*t*): 4. 12—14, 25, 27—29, 19; 4. 1—4, 22, 24, 9;	гл. 7, § 4 гл. 7, § 5
$\mathcal{M}R$	2	+	0	3	—		П(*t*): 4. 1—4, 22, 24, 11; *L*(*t*): 4. 12—14, 25, 27—29, 21; 4. 1—4. 22, 24, 11;	гл. 7, § 4 гл. 7, § 5

* $\mathcal{M}$ (в отличие от *M*) означает, что прерывание допускается в течение кванта времени обслуживания, после чего прерывания не происходит.

** 0 означает, что ориентация имеет место только внутри периода занятости, там, где обслуживание прерывается.

Таблица 5

$$\sigma_2\pi_2(s) = a_1\pi_{21}(s) + a_2\pi_{22}(s), \tag{1.1}$$

$$\sigma_2\pi_2(s) = \begin{cases} a_1\pi_{21}^{[1]}(s) + a_2\pi_{22}^{[1]}(s), & \text{если } a_1 \geqslant a_2, \\ a_1\pi_{21}^{[2]}(s) + a_2\pi_{22}^{[2]}(s), & \text{если } a_1 < a_2, \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\pi_{21}(s) = \pi_1(s+a_2) + \{\pi_1(s+a_2[1-\bar\pi_2(s)]) - \pi_1(s+a_2)\}\,\nu_2(s+a_2[1-\bar\pi_2(s)]), \tag{1.3}$$

$$\pi_{22}(s) = \nu_2(s+a_2[1-\bar\pi_2(s)])\,\bar\pi_2(s), \tag{1.4}$$

$$\pi_{21}(s) = \pi_1(s+a_2) + \{\pi_1(s+a_2[1-\bar\pi_2^1(s)]) - \pi_1(s+a_2)\}\,\frac{\pi_2^0(s)}{\bar\pi_2^1(s)}\,\nu_2(s+a_2[1-\bar\pi_2^1(s)]), \tag{1.5}$$

$$\pi_{22}(s) = \nu_2(s+a_2[1-\bar\pi_2^1(s)])\,\bar\pi_2^0(s), \tag{1.6}$$

$$\pi_{21}(s) = \pi_{21}^{[1]}(s) = \bar\pi_1(s+a_2) + \{\bar\pi_1(s+a_2[1-\bar\pi_2(s)]) - \bar\pi_1(s+a_2)\}\,\nu_2(s+a_2[1-\bar\pi_2(s)])\,\varphi_1(s), \tag{1.7}$$

$$\pi_{22}(s) = \pi_{22}^{[1]}(s) = \nu_2(s+a_2[1-\bar\pi_2(s)])\,\bar\pi_2(s)\,\varphi_1(s), \tag{1.8}$$

$$\pi_{21}(s) = \pi_{21}^{[1]}(s) = \bar\pi_1(s+a_2) + \{\bar\pi_1(s+a_2[1-\bar\pi_2^1(s)]) - \bar\pi_1(s+a_2)\}\,\frac{\bar\pi_2^{\varphi_1}(s)}{\bar\pi_2^1(s)}\,\nu_2(s+a_2[1-\bar\pi_2^1(s)]), \tag{1.9}$$

$$\pi_{22}(s) = \pi_{22}^{[1]}(s) = \nu_2(s+a_2[1-\bar\pi_2^1(s)])\,\bar\pi_2^{\varphi_1}(s), \tag{1.10}$$

$$\pi_{21}^{[2]}(s) = \pi_1(s+a_2[1-\bar\pi_2(s)])\,\nu_2(s+a_2[1-\bar\pi_2(s)]), \tag{1.11}$$

$$\pi_{21}^{[2]}(s) = \pi_1(s+a_2)\,\varphi_2(s) + \{\pi_1(s+a_2[1-\bar\pi_2^1(s)]) - \pi_1(s+a_2)\}\,\frac{\bar\pi_2^{\varphi_2}(s)}{\bar\pi_2^1(s)}\,\nu_2(s+a_2[1-\bar\pi_2^1(s)]), \tag{1.12}$$

$$\bar\pi_2(s) = \pi_{22}^{[2]}(s) = h_2(s+a_2[1-\bar\pi_2(s)]), \tag{1.13}$$

$$\bar{\pi}_2^0(s) = \frac{\bar{\pi}_2^1(s)\, h_2^0(s+a_2)}{\bar{\pi}_2^1(s)\,[1-h_2^0(s+a_2)] - h_2^0(s+a_2[1-\bar{\pi}_2^1(s)])}, \quad 1.14$$

$$\bar{\pi}_2^1(s) = h_2(s+a_2[1-\bar{\pi}_2^1(s)]), \quad 1.15$$

$$\bar{\pi}_2^{\varphi_1}(s) = \bar{\pi}_2^1(s)\,\{\beta_2(s+\sigma)\,\varphi_1(s) + c_{21}(s+\sigma-a_1\bar{\pi}_1(s+a_2)) \times$$
$$\times [\beta_2(s+\sigma-a_1\bar{\pi}_1(s+a_2)) - \beta_2(s+\sigma)]\} \times$$
$$\times \{\bar{\pi}_2^1(s) - h_2^0(s+a_2[1-\bar{\pi}_2^1(s)]) + h_2^0(s+a_2)\}^{-1}, \quad 1.16$$

$$\pi_{22}^{[2]}(s) = \bar{\pi}_2^{\varphi_2}(s) = \bar{\pi}_2^1(s)\,\{\beta_2(s+\sigma) + c_{21}(s+\sigma-a_1\bar{\pi}_1(s+a_2)) \times$$
$$\times [\beta_2(s+\sigma-a_1\bar{\pi}_1(s+a_2)) - \beta_2(s+\sigma)]\,\varphi_2(s)\} \times$$
$$\times \{\bar{\pi}_2^1(s) - h_2^0(s+a_2[1-\bar{\pi}_2^1(s)]) + h_2^0(s+a_2)\}^{-1}, \quad 1.17$$

$$\pi_1(s) = c_{21}(s+a_1[1-\bar{\pi}_1(s)])\,\bar{\pi}_1(s), \quad 1.18$$

$$\bar{\pi}_1(s) = \beta_1(s+a_1[1-\bar{\pi}_1(s)]), \quad 1.19$$

$$\varphi_1(s) = c_{21}(s+\sigma-a_1\bar{\pi}_1(s+a_2))\,\{1-[c_{21}(s+\sigma-a_2\bar{\pi}_2(s) -$$
$$- a_1\bar{\pi}_1(s+a_2[1-\bar{\pi}_2(s)])) - c_{21}(s+\sigma-a_1\bar{\pi}_1(s+a_2))] \times$$
$$\times \nu_2(s+a_2[1-\bar{\pi}_2(s)])\}^{-1}, \quad 1.20$$

$$\varphi_1(s) = c_{21}(s+\sigma-a_1\bar{\pi}_1(s+a_2))\,\{1+[\bar{\pi}_2^1(s) + h_2^0(s+a_2) -$$
$$- h_2^0(s+a_2[1-\bar{\pi}_2^1(s)]) + \beta_2(s+\sigma-a_1\bar{\pi}_1(s+a_2)) \times$$
$$\times [c_{21}(s+\sigma-a_2\bar{\pi}_2(s) - a_1\bar{\pi}_1(s+a_2[1-\bar{\pi}_2(s)])) -$$
$$- c_{21}(s+\sigma-a_1\bar{\pi}_1(s+a_2))]\,\nu_2(s+a_2[1-\bar{\pi}_2^1(s)])\} \times$$
$$\times \{\bar{\pi}_2^1(s) + h_2^0(s+a_2) - h_2^0(s+a_2[1-\bar{\pi}_2^1(s)]) -$$
$$- \beta_2(s+\sigma)\,[c_{21}(s+\sigma-a_2\bar{\pi}_2(s) - a_1\bar{\pi}_1(s+a_2[1-\bar{\pi}_2(s)])) -$$
$$- c_{21}(s+\sigma-a_1\bar{\pi}_1(s+a_2))]\,\nu_2(s+a_2[1-\bar{\pi}_2^1(s)])\}^{-1}, \quad 1.21$$

$$\varphi_2(s) =$$
$$= \left\{\nu_2(s+a_2) + \frac{[\nu_2(s+a_2[1-\bar{\pi}_2^1(s)]) - \nu_2(s+a_2)]\,\beta_2(s+\sigma)}{\bar{\pi}_2^1(s) - h_2^0(s+a_2[1-\bar{\pi}_2^1(s)]) + h_2^0(s+a_2)}\right\} \times$$
$$\times \left\{1 - \frac{[\nu_2(s+a_2[1-\bar{\pi}_2^1(s)]) - \nu_2(s+a_2)]}{\bar{\pi}_2^1(s) - h_2^0(s+a_2[1-\bar{\pi}_2^1(s)]) + h_2^0(s+a_2)} \times\right.$$

$$\times c_{21}(s+\sigma-a_1\bar{\pi}_1(s+a_2))[\beta_2(s+\sigma-a_1\bar{\pi}_1(s+a_2))-\beta_2(s+\sigma)]\Bigg\}^{-1}, \quad 1.22$$

$$h_2^0(s)=\beta_2(s+a_1)+c_{21}(s+a_1[1-\bar{\pi}_1(s)])\times$$
$$\times[\beta_2(s+a_1[1-\bar{\pi}_1(s)])-\beta_2(s+a_1)], \quad 1.23$$

$$h_2(s)=\beta_2(s+a_1)+c_{21}(s+a_1[1-\bar{\pi}_1(s)])\times$$
$$\times[\beta_2(s+a_1[1-\bar{\pi}_1(s)])-\beta_2(s+a_1)]\nu_2(s), \quad 1.24$$

$$h_2(s)=\beta_2(s+a_1)\left\{1-\frac{a_1}{s+a_1}[1-\beta_2(s+a_1)]\times\right.$$
$$\left.\times c_{21}(s+a_1[1-\bar{\pi}_1(s)])\bar{\pi}_1'(s)\nu_2(s)\right\}^{-1}, \quad 1.25$$

$$h_2(s)=\beta_2(s+a_1)+\frac{a_1}{s+a_1}[1-\beta_2(s+a_1)]c_{21}(s+$$
$$+a_1[1-\bar{\pi}_1(s)])\bar{\pi}_1(s)\nu_2(s), \quad 1.26$$

$$h_2(s)=\beta_2(s+a_1[1-c_{21}(s+a_1[1-\bar{\pi}_1(s)])\bar{\pi}_1(s)\nu_2(s)]), \quad 1.27$$

$$h_2(s)=(s+a_1)\times$$
$$\times\int_0^\infty\frac{e^{-(s+a_1)x}\,dB_2(x)}{s+a_1\{1-c_{21}(s+a_1[1-\bar{\pi}_1(s)])\bar{\pi}_1'(s)\nu_2(s)[1-e^{-(s+a_1)x}]\}}, \quad 1.28$$

$$\nu_2(s)=c_{12}(s+a_1)\left\{1-\frac{a_1}{s+a_1}[1-c_{12}(s+a_1)]c_{21}(s+\right.$$
$$\left.+a_1[1-\bar{\pi}_1(s)])\bar{\pi}_1(s)\right\}^{-1}, \quad 1.29$$

$$\nu_2(s)=c_{12}(s+a_1[1-c_{21}(s+a_1[1-\bar{\pi}_1(s)])\bar{\pi}_1(s)]), \quad 1.30$$

$$\nu_2(s)=$$
$$=(s+a_1)\int_0^\infty\frac{e^{-(s+a_1)x}\,dC_{12}(x)}{s+a_1\{1-c_{21}(s+a_1[1-\bar{\pi}_1(s)])\bar{\pi}_1(s)[1-e^{-(s+a_1)x}]\}}, \quad 1.31$$

$$\nu_2(s)=c_{12}(s+a_1)\{1-[c_{12}(s+a_1[1-\bar{\pi}_1(s)])-$$
$$-c_{12}(s+a_1)]c_{21}(s+a_1[1-\bar{\pi}_1(s)])\}^{-1}. \quad 1.32$$

При $a_1\beta_{11} < 1$, $a_2 h_2 < 1$

$$\sigma\pi_1 = a_1\pi_{211} + a_2\pi_{221},$$

$$\sigma\pi_1 = \begin{cases} a_1\pi_{211}^{[1]} + a_2\pi_{221}^{[1]}, & \text{если } a_1 \geqslant a_2, \\ a_1\pi_{211}^{[2]} + a_2\pi_{221}^{[2]}, & \text{если } a_1 < a_2, \end{cases}$$

$$\pi_{211} = \left\{\frac{c_{211} + \beta_{11}}{1 - a_1\beta_{11}} + (1 - \pi_1(a_2))\, \nu_{21}\right\} \frac{1}{1 - a_2 h_{21}},$$

$$\pi_{221} = \frac{\nu_{21} + h_{21}}{1 - a_2 h_{21}},$$

$$p(z, s) = \frac{1 + \sigma\pi(z, s)}{s + \sigma - \sigma\pi(s)}, \qquad 2.1$$

$$\sigma\pi(z, s) = a_1\pi_1(z, s) + \nu_2(z, s)\,\gamma(s, z) + \frac{h_2(z, s)}{z_2 - h_2(s + [\ ]_2)} \times$$

$$\times \{\gamma(s, z)\,\nu_2(s + [\ ]_2) + a_1\pi_1(s + a_2) - \sigma\pi(s)\}, \qquad 2.2$$

$$\gamma(s, z) = a_1[\pi_1(s + [\ ]_2) - \pi_1(s + a_2)] + a_2 z_2, \qquad 2.3$$

$$p(z, s) = \begin{cases} [1 + \sigma\pi^{[1]}(z, s)]\,[s + \sigma - \sigma\pi^{[1]}(s)]^{-1} & \text{при } a_1 \geqslant a_2, \\ [1 + \sigma\pi^{[2]}(z, s)]\,[s + \sigma - \sigma\pi^{[2]}(s)]^{-1} & \text{при } a_1 < a_2, \end{cases} \qquad 2.4$$

$$\sigma\pi(z, s) = \sigma\pi^{[1]}(z, s) = a_1\bar{\pi}_1(z, s) + \nu_2(z, s)\,\bar{\gamma}(s, z) +$$

$$+ v(s)\,\varphi_1(z, s) + \frac{h_2(z, s)}{z_2 - h_2(s + [\ ]_2)} \{\bar{\gamma}(s, z)\,\nu_2(s + [\ ]_2) - v(s)\}, \qquad 2.5$$

$$\bar{\gamma}(s, z) = a_1[\bar{\pi}_1(s + [\ ]_2) - \bar{\pi}_1(s + a_2)] + a_2 z_2, \qquad 2.6$$

$$v(s) = a_1\{\bar{\pi}_1(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2(s)]) - \bar{\pi}_1(s + a_2)\}\,\nu_2(s +$$

$$+ a_2[1 - \bar{\pi}_2(s)]) + a_2\nu_2(s + a_2[1 - \bar{\pi}_2(s)])\,\bar{\pi}_2(s), \qquad 2.7$$

$$\bar{\pi}_1(z, s) = z_1 \frac{1 - \beta_1(s + [\ ]_1)}{s + [\ ]_1} \cdot \frac{z_1 - \bar{\pi}_1(s + [\ ]_2)}{z_1 - \beta_1(s + [\ ]_1)}, \qquad 2.8$$

$$\sigma\pi^{[2]}(z, s) = a_1\pi_1(z, s) + a_1\pi_1(s + a_2)\,\varphi_2(z, s) +$$

$$+ \omega(s, z)\,\nu_2(z, s) + \frac{h_2(z, s)}{z_2 - h_2(s + [\ ]_2)} \{\omega(s, z)\,\nu_2(s + [\ ]_2) -$$

$$- \sigma\pi^{[2]}(s) - a_1\pi_1(s + a_2)\,\varphi_2(s) - a_2 z_2\}, \qquad 2.9$$

$$\sigma\pi^{[1]}(s) = a_1\bar{\pi}_1(s + a_2) + v(s)\,\varphi_1(s), \qquad 2.10$$

$$\sigma\pi^{[2]}(s) = a_1\pi_1(s + a_2[1 - \overline{\pi}_2(s)])\,\varphi_2(s) + a_2\overline{\pi}_2(s), \qquad 2.11$$

$$\omega(s, z) = a_1[\pi_1(s + [\;]_2) - \pi_1(s + a_2)], \qquad 2.12$$

$$\sigma\pi(z, s) = a_1\pi_1(z, s) + \gamma(s, z) + \frac{\sigma\pi(s) - a_1\pi_1(s + a_2)}{\overline{\pi}_2^0(s)}\overline{\pi}_2^0(z, s) +$$

$$+ \frac{h_2(z, s)}{z_2 - h_2(s + [\;]_2)}\left[\frac{\gamma(s, z)\,\nu_2(s + [\;]_2)}{z_2} + \frac{a_1\pi_1(s + a_2) - \sigma\pi(s)}{\overline{\pi}_2^0(s)}\right], \qquad 2.13$$

$$\sigma\pi(z, s) = \sigma\pi^{[1]}(z, s) =$$

$$= a_1\overline{\pi}_1(z, s) + \nu_2(z, s)\,\overline{\gamma}(s, z) + \frac{h_2(z, s)}{z_2 - h_2(s + [\;]_2)} \times$$

$$\times \left\{\frac{\overline{\gamma}(s, z)\,\nu_2(s + [\;]_2)}{z_2} - \overline{A}(s)\right\} + \overline{A}(s)\,\overline{\pi}_2^{\varphi_1}(z, s), \qquad 2.14$$

$$\overline{A}(s) = a_2\nu_2(s + a_2[1 - \overline{\pi}_2^1(s)]) + \frac{a_1\nu_2(s + a_2[1 - \overline{\pi}_2^1(s)]}{\overline{\pi}_2^1(s)} \times$$

$$\times [\overline{\pi}_1(s + a_2[1 - \overline{\pi}_2^1(s)]) - \overline{\pi}_1(s + a_2)], \qquad 2.15$$

$$\sigma\pi^{[2]}(z, s) = a_1\pi_1(z, s) + a_1\pi_1(s + a_2)\,\varphi_2(z, s) +$$

$$+ \omega(s, z)\,\nu_2(z, s) +$$

$$+ \frac{h_2(z, s)}{z_2 - h_2(s + [\;]_2)}\left[\frac{\omega(s, z)\,\nu_2(s + [\;]_2)}{z_2} - A(s)\right] +$$

$$+ [A(s) + a_2]\,\pi_2^{\varphi_2}(z, s), \qquad 2.16$$

$$\sigma\pi^{[1]}(s) = a_1\left\{\overline{\pi}_1(s + a_2) + [\overline{\pi}_1(s + a_2[1 - \overline{\pi}_2^1(s)]) - \right.$$

$$\left. - \overline{\pi}_1(s + a_2)]\,\frac{\overline{\pi}_2^{\varphi_1}(s)}{\overline{\pi}_2^1(s)}\,\nu_2(s + a_2[1 - \overline{\pi}_2^1(s)])\right\} +$$

$$+ a_2\nu_2(s + a_2[1 - \overline{\pi}_2^1(s)])\,\overline{\pi}_2^{\varphi_1}(s), \qquad 2.17$$

$$\sigma\pi^{[2]}(s) = a_1\left\{\pi_1(s + a_2)\,\varphi_2(s) + [\pi_1(s + a_2[1 - \overline{\pi}_2^1(s)]) - \right.$$

$$\left. - \pi_1(s + a_2)]\,\frac{\overline{\pi}_2^{\varphi_2}(s)}{\overline{\pi}_2^1(s)}\,\nu_2(s + a_2[1 - \overline{\pi}_2^1(s)])\right\} + a_2\,\overline{\pi}_2^{\varphi_2}(s), \qquad 2.18$$

$$A(s) = a_1 \frac{\nu_2 (s + a_2 [1 - \overline{\pi}_2^1 (s)])}{\overline{\pi}_2^1 (s)} [\pi_1 (s + a_2 [1 -$$

$$- \overline{\pi}_2^1 (s)]) - \pi_1 (s + a_2)], \qquad 2.19$$

$$\pi_1 (z, s) = \frac{1}{s + [\ ]_1} \Big\{ 1 - c_{21} (s + [\ ]_1) +$$

$$+ z_1 \frac{1 - \beta_1 (s + [\ ]_1)}{z_1 - \beta_1 (s + [\ ]_1)} [z_1 c_{21} (s + [\ ]_1) -$$

$$- \overline{\pi}_1 (s + [\ ]_2) c_{21} (s + [\ ]_2 + a_1 [1 - \overline{\pi}_1 (s + [\ ]_2)] \Big\}, \qquad 2.20$$

$$\overline{\pi}_2^0 (z, s) = \frac{h_2 (z, s) [h_2^0 (s + [\ ]_2) - h_2^0 (s + a_2) - z_2 \omega_0 (s)]}{[z_2 - h_2 (s + [\ ]_2)] z_2 [1 - \omega_0 (s)]}, \qquad 2.21$$

$$\omega_0 (s) = \frac{h_2^0 (s + a_2 [1 - \overline{\pi}_2^1 (s)]) - h_2^0 (s + a_2)}{\overline{\pi}_2^1 (s)}, \qquad 2.22$$

$$\overline{\pi}_2^{\varphi_1} (z, s) = \Big\{ \frac{z_2 [1 - \beta_2 (s + [\ ]_1 + s)}{s + [\ ]_1} + \beta_2 (s + \sigma) \varphi_1 (z, s) +$$

$$+ \alpha (s, z) [1 - c_{21} ([\ ]_1 + s)] +$$

$$+ \frac{1 - \beta_1 (s + [\ ]_2)}{z_1 - \beta_1 (s + [\ ]_2)} \left[\alpha (s, z) c_{21} (s + [\ ]_1) \frac{q (s, z)}{s + [\ ]_1} \right] +$$

$$+ \frac{h_2 (z, s)}{z_2 - h_2 (s + [\ ]_2)} \Big\{ \frac{h_2^0 (s + [\ ]_2) - h_2^0 (s + a_2)}{z_2} -$$

$$- \frac{h_2^0 (s + a_2 [1 - \overline{\pi}_2^1 (s)]) - h_2^0 (s + a_2)}{\overline{\pi}_2^1 (s)} \Big\} K (s), \qquad 2.23$$

$$K (s) = \frac{\overline{\pi}_2^1 (s)}{\overline{\pi}_2^1 (s) - h_2^0 (s + a_2 [1 - \overline{\pi}_2^1 (s)]) + h_2^0 (s + a_2)}, \qquad 2.24$$

$$\overline{\pi}_2^{\varphi_2} (z, s) = \Big\{ z_2 \frac{1 - \beta_2 (s + [\ ]_1)}{s + [\ ]_1} + \alpha (s, z) [1 - c_{21} (s + [\ ]_1)] +$$

$$+ \frac{1 - \beta_1 (s + [\ ]_1)}{z_1 - \beta_1 (s + [\ ]_1)} \left[\alpha (s, z) c_{21} (s + [\ ]_1) - \frac{q (s, z)}{s + [\ ]_1} \right] +$$

$$+ q (s, z) \varphi_2 (z, s) + \frac{h_2 (z, s)}{z_2 - h_2 (s + [\ ]_2)} \left[\frac{h_2^0 (s + [\ ]_2) - h_2^0 (s + a_2)}{z_2} - \right.$$

$$- \frac{h_2^0(s + a_2[1 - \overline{\pi}_2^1(s)]) - h_2^0(s + a_2)}{\overline{\pi}_2^1(s)} \Bigg] \Bigg\} K(s), \qquad 2.25$$

$$\varphi_1(z, s) = \Bigg\{ \frac{1 - c_{21}(s + [\ ]_1)}{s + [\ ]_1} + \frac{z_1[1 - \beta_1(s + [\ ]_1)]\psi(s, z)}{[s + [\ ]_1][z_1 - \beta_1(s + [\ ]_1)]} +$$

$$+ \frac{h_2(z, s)}{z_2 - h_2(s + [\ ]_2)}[\varkappa(s, z)\nu_2(s + [\ ]_2) - g_2(s)] +$$

$$+ \varkappa(s, z)\nu_2(z, s) \Bigg\} [1 - g_2(s)]^{-1}, \qquad 2.26$$

$$\varkappa(s, z) = c_{21}(s + [\ ]_2 + a_1[1 - \overline{\pi}_1(s + [\ ]_2)]) -$$

$$- c_{21}(s + a_2 + a_1[1 - \overline{\pi}_1(s + a_2)]), \qquad 2.27$$

$$\psi(s, z) = c_{12}(s + [\ ]_1) - c_{12}(s + [\ ]_2 + a_1[1 - \overline{\pi}_1(s + [\ ]_2)]), \qquad 2.28$$

$$\varphi_2(z, s) = \frac{h_2(z, s)}{z_2 - h_2(s + [\ ]_2)}[\nu_2(s + [\ ]_2) -$$

$$- \nu_2(s + a_2[1 - \overline{\pi}_2(s)])] + \nu_2(z, s), \qquad 2.29$$

$$\varphi_1(z, s) = \Bigg\{ \frac{1 - c_{21}(s + [\ ]_1)}{s + [\ ]_2} \frac{z_1[1 - \beta_1(s + [\ ]_1)}{[s + [\ ]_1][z_1 - \beta_1(s + [\ ]_1)]}\psi(s, z) +$$

$$+ \varkappa(s, z)\nu_2(z, s) + \frac{sh_2(z, s)}{z_2 - h_2(s + [\ ]_2)} \Bigg\{ \Bigg[\frac{\nu_2(s + [\ ]_2)}{z_2}\varkappa(s, z) -$$

$$- \frac{\nu_2(s + a_2[1 - \overline{\pi}_2^1(s)])}{\overline{\pi}_2^1(s)}[c_{21}(s + \sigma - a_2\overline{\pi}_2^1(s) -$$

$$- a_1\overline{\pi}_1(s + a_2[1 - \overline{\pi}_2^1(s)])) - c_{21}(s + \sigma - a_1\overline{\pi}_1(s + a_2))] +$$

$$+ \Bigg[\frac{h_2^0(s + [\ ]_2) - h_2^0(s + a_2)}{z^2} -$$

$$- \frac{h_2^0(s + a_2[1 - \overline{\pi}_2^1(s)]) - h_2^0(s + a_2)}{\overline{\pi}_2^1(s)} \Bigg] \Bigg\} K(s) +$$

$$+ \Bigg\{ z_2 \frac{1 - \beta_2(s + [\ ]_1)}{s + [\ ]_1} + q(s, z)[1 - c_{21}(s + [\ ]_1)] +$$

$$+ \frac{1 - \beta_1(s + [\ ]_2)}{z_1 - \beta_1(s + [\ ]_2)} \Bigg[q(s, z)c_{21}(s + [\ ]_1) -$$

$$- \frac{\alpha(s, z)}{s + [\ ]_1} \Bigg] \Bigg\} K(s) \Bigg\} [1 - \beta_2(s + \sigma)K(s)]^{-1}, \qquad 2.30$$

$$\varphi_2(z, s) = \Bigg\{ \nu_2(z, s) + \frac{h_2(z, s)}{z_2 - h_2(s + [\ ]_2)} \Bigg[\frac{\nu_2(s + [\ ]_2) - \nu_2(s + a_2)}{z_2} - \frac{\nu_2(s + a_2[1 - \overline{\pi}_2^1(s)]) - \nu_2(s + a_2)}{\overline{\pi}_2^1(s)} \Bigg] + $$

$$+ \frac{\nu_2(s + a_2[1 - \overline{\pi}_2^1(s)]) - \nu_2(s + a_2)}{\overline{\pi}_2^1(s)} \times$$

$$\times \Bigg\{ \frac{z_2[1 - \beta_2(s + [\ ]_1)}{s + [\ ]_1} + \alpha(s, z)[1 - c_{21}(s + [\ ]_1)] + $$

$$+ \frac{1 - \beta_1(s + [\ ]_1)}{z_1 - \beta_1(s + [\ ]_1)} \Bigg[\alpha(s, z)\, c_{21}(s + [\ ]_1) - \frac{q(s, z)}{s + [\ ]_1} \Bigg] + $$

$$+ \frac{h_2(z, s)}{z_2 - h_2(s + [\ ]_2)} \Bigg[\frac{h_2^0(s + [\ ]_2) - h_2^0(s + a_2)}{z_2} - $$

$$- \frac{h_2^0(s + a_2[1 - \overline{\pi}_2^1(s)]) - h_2^0(s + a_2)}{\overline{\pi}_2^1(s)} \Bigg] \Bigg\} K(s) \Bigg\} \times$$

$$\times \Bigg[1 - \frac{\nu_2(s + a_2[1 - \overline{\pi}_2^1(s)]) - \nu_2(s + a_2)}{\overline{\pi}_2^1(s)} K(s)\, q(s, z) \Bigg]^{-1}, \tag{2.31}$$

$$h_2^0(z, s) = \frac{1 - \beta_1(s + [\ ]_1)}{z_1 - \beta_1(s + [\ ]_1)} \Bigg\{ \alpha(s, z)\, c_{21}(s + [\ ]_1) - \frac{q(s, z)}{s + [\ ]_1} \Bigg\} + $$

$$+ \frac{z_2[1 - \beta_2(s + [\ ]_1)]}{s + [\ ]_1} + \alpha(s, z)[1 - c_{21}(s + [\ ]_1)] + q(s, z), \tag{2.32}$$

$$q(s, z) = \{\beta_2(s + [\ ]_2 + a_1[1 - \overline{\pi}_1(s + [\ ]_2)]) - \beta_2(s + [\ ]_2 + a_1)\} \times$$

$$\times c_{21}(s + [\ ]_2 + a_1[1 - \overline{\pi}_1(s + [\ ]_2)]), \tag{2.33}$$

$$\alpha(s, z) = \frac{\beta_2(s + [\ ]_1) - \beta_2(s + [\ ]_2 + a_1)}{s + [\ ]_1}, \tag{2.34}$$

$$h_2(z, s) = \frac{1 - \beta_1(s + [\ ]_1)}{z_1 - \beta_1(s + [\ ]_1)} \Bigg\{ \alpha(s, z)\, c_{21}(s + [\ ]_1) - \frac{q(s, z)}{s + [\ ]_1} + $$

$$+ \frac{z_2[1 - \beta_2(s + [\ ]_1)]}{s + [\ ]_1} + \alpha(s, z)[1 - c_{21}(s + [\ ]_1)] + q(s, z)\nu_2(z, s), \tag{2.35}$$

$$h_2(z, s) = z_2 \frac{[1 + a_1 \pi_1(z, s) + a_1 \pi_1(s + [\ ]_2) \nu_2(z, s)] \times}{[s + [\ ]_2 + a_1 - a_1 [1 - \beta_2(s + [\ ]_2 + a_1)] \times]}$$

$$\frac{\times [1 - \beta_2(s + [\ ]_2 + a_1)]}{\times \pi_1(s + [\ ]_2) \nu_2(s + [\ ]_2)}, \qquad 2.36$$

$$h_2(z, s) z_2 = \frac{1 - \beta_2(s + [\ ]_2 + a_1)}{s + [\ ]_2 + a_1} [1 + a_1 \pi_1(z, s) +$$

$$+ a_1 \pi_1(s + [\ ]_2) \nu_2(z, s)], \qquad 2.37$$

$$h_2(z, s) = z_2 \frac{1 - \beta_2(s + [\ ]_2 + a_1 [1 - \delta(s + [\ ]_2)])}{s + [\ ]_2 + a_1 [1 - \delta(s + [\ ]_2)]} \times$$

$$\times [1 + a_1 \pi_1(z, s) + a_1 \pi_1(s + [\ ]_2) \nu_2(z, s)], \qquad 2.38$$

$$\delta(s + [\ ]_2) = c_{21}(s + [\ ]_2 +$$

$$+ a_1 [1 - \bar{\pi}_1(s + [\ ]_2)]) \bar{\pi}_1(s + [\ ]_2) \nu_2(s + [\ ]_2), \qquad 2.39$$

$$h_2(z, s) = z_2 [1 + a_1 \pi_1(z, s) + a_1 \pi_1(s + [\ ]_2) \nu_2(z, s)] \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{\{1 - e^{-(s + [\ ]_2 + a_1) u}\} dB_2(u)}{s + [\ ]_2 + a_1 - a_1 \pi_1(s + [\ ]_2) \nu_2(s + [\ ]_2) [1 - e^{-(s + [\ ]_2 + a_1) u}]},$$

$$2.40$$

$$\nu_2(z, s) = \frac{[1 - c_{12}(s + [\ ]_2 + a_1)] [1 + a_1 \pi_1(z, s)]}{s + [\ ]_2 + a_1 - a_1 [1 - c_{12}(s + [\ ]_2 + a_1)] \pi_1 [s + [\ ]_2)},$$

$$2.41$$

$$\nu_2(z, s) = \frac{1 - c_{12}(s + [\ ]_2 + a_1 [1 - \pi_1(s + [\ ]_2)])}{s + [\ ]_2 + a_1 [1 - \pi_1(s + [\ ]_2)]} [1 + a_1 \pi_1(z, s)],$$

$$2.42$$

$$\nu_2(z, s) = [1 + a_1 \pi_1(z, s)] \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{\{1 - e^{-(s + a_1 + [\ ]_2) \tau}\} dC_{12}(\tau)}{s + [\ ]_2 + a_1 - a_1 \pi_1(s + [\ ]_2) [1 - e^{-(s + a_1 + [\ ]_2) \tau}]}, \qquad 2.43$$

$$\nu_2(z, s) = \left\{ \left[\frac{1 - c_{12}(s + [\ ]_2)}{s + [\ ]_2} + \frac{[1 - c_{21}(s + [\ ]_1) d(s, z)}{s + [\ ]_1} \right] + \right.$$

$$\left. + z_1 \frac{[1 - \beta_1(s + [\ ]_1)] [d(s, z) c_{21}(s + [\ ]_1) - \mu(s + [\ ]_2)}{[z_1 - \beta_1(s + [\ ]_1)] [s + [\ ]_1]} \right\} \times$$

$$\times [1 - \mu(s + [\ ]_2)]^{-1}, \qquad 2.44$$

$$d(s, z) = c_{12}(s + [\ ]_1) - c_{12}(s + [\ ]_2 + a_1), \qquad 2.45$$

$$\mu(s+[\ ]_2)=[c_{12}(s+[\ ]_2+a_1[1-\bar{\pi}_1(s+[\ ]_2)])-$$

$$-c_{12}(s+[\ ]_2+a_1)]\,c_{21}(s+[\ ]_2+a_1[1-\bar{\pi}_1(s+[\ ]_2)]). \quad 2.46$$

$$p_j(s)=\frac{\sigma\, {}_j\pi(s)}{\sigma+s-\sigma\pi(s)}, \quad 3.1$$

$$\sigma\, {}_j\pi(s)=\Omega_j+\frac{{}_jh_2(s)}{1-h_2(s)}\{\gamma(s)\,\nu_2(s)+a_1\,\pi_1(s+a_2)-\sigma\pi(s)\}, \quad 3.2$$

$$\Omega_j=\begin{cases} a_1 s^{-1}[1-c_{21}(s)]+\gamma(s)\,{}_1\nu_2(s) & \text{при } j=1\\ a_1 s^{-1}[c_{21}(s)-\pi_1(s)]+\nu(s)\,{}_2\nu_2(s) & \text{при } j=2\\ \gamma(s)\cdot{}_3\nu_2(s) & \text{при } j=3\\ 0 & \text{при } j=4\end{cases} \quad 3.3$$

$$\gamma(s)=a_1[\pi_1(s)-\pi_1(s+a_2)]+a_2, \quad 3.4$$

$$\sigma\, {}_j\pi(s)=W_j+v(s)\,{}_j\varphi_1(s)+\frac{{}_jh_2(s)}{1-h_2(s)}\,[\bar{\gamma}(s)\,\nu_2(s)-v(s)], \quad 3.5$$

$$W_j=\begin{cases} [a_1\bar{\pi}_1(s)+a_2]\,{}_1\nu_2(s) & \text{при } j=1\\ a_1[1-\bar{\pi}_1(s)]+[a_1\bar{\pi}_1(s)+a_2]\,{}_2\nu_2(s) & \text{при } j=2\\ [a_1\bar{\pi}_1(s)+a_2]\,{}_3\nu_2(s) & \text{при } j=3\\ 0 & \text{при } j=4\end{cases} \quad 3.6$$

$$\bar{\gamma}(s)=a_1[\bar{\pi}_1(s)-\bar{\pi}_1(s+a_2)]+a_2, \quad 3.7$$

$${}_j\varphi_1(s)=\left\{D_j+\frac{{}_3h_2(s)}{1-h_2(s)}[\nu_2(s)\,\lambda(s)-g_2(s)]\right\}[1-g_2(s)]^{-1}, \quad 3.8$$

$$D_j=\begin{cases} 1-c_{21}(s)+{}_1\nu_2(s)\,\lambda(s) & \text{при } j=1\\ c_{21}(s)-s_{21}(s+a_1-a_1\bar{\pi}_1(s))+{}_2\nu_2(s)\,\lambda(s) & \text{при } j=2\\ {}_3\nu_2(s) & \text{при } j=3\\ 0 & \text{при } j=4,\end{cases} \quad 3.9$$

$$\lambda(s)=c_{21}(s+a_1-a_1\bar{\pi}_1(s))-c_{21}(s+\sigma-a_1\bar{\pi}_1(s+a_2)), \quad 3.10$$

$$g_2(s)=\{c_{21}(s+\sigma-a_2\bar{\pi}_2(s))-a_1\bar{\pi}_1(s+a_2[1-\bar{\pi}_2(s)])-$$

$$-c_{21}(s+\sigma-a_1\bar{\pi}_1(s+a_2))\}\,\nu_2(s+a_2[1-\bar{\pi}_2(s)]), \quad 3.11$$

$${}_1h_2(s)=\frac{a_1[1-\beta_2(s+a_1)]\{s^{-1}[1-c_{21}(s)]+\pi_1(s)\,{}_1\nu_2(s)\}}{s+a_1-a_1[1-\beta_2(s+a_1)]\,\pi_1(s)\,\nu_2(s)}, \quad 3.12$$

$${}_2h_2(s)=\frac{a_1[1-\beta_2(s+a_1)]\{c_{21}(s)s^{-1}[1-\pi_1(s)]+\pi_1(s)\,{}_2\nu_2(s)\}}{s+a_1-a_1[1-\beta_2(s+a_1)]\,\pi_1(s)\,\nu_2(s)}, \quad 3.13$$

$$ {}_3h_2(s) = \frac{a_1[1-\beta_2(s+a_1)]\,\pi_1(s)\,{}_3\nu_2(s)}{s+a_1-a_1[1-\beta_2(s+a_1)]\,\pi_1(s)\,\nu_2(s)}, \qquad 3.14 $$

$$ {}_4h_2(s) = \frac{1-\beta_2(s+a_1)}{s+a_1-a_1[1-\beta_2(s+a_1)]\,\pi_1(s)\,\nu_2(s)}, \qquad 3.15 $$

$$ {}_1h_2(s) = \frac{a_1}{s+a_1}[1-\beta_2(s+a_1)]\,\{s^{-1}[1-c_{21}(s)]+\pi_1(s)\,{}_1\nu_2(s)\}, \qquad 3.16 $$

$$ {}_2h_2(s) = \frac{a_1}{s+a_1}[1-\beta_2(s+a_1)]\,\{c_{21}(s)s^{-1}[1-\overline{\pi}_1(s)]+\pi_1(s)\,{}_2\nu_2(s)\}, \qquad 3.17 $$

$$ {}_3h_2(s) = \frac{a_1\,\pi_1(s)\,{}_3\nu_2(s)}{s+a_1}[1-\beta_2(s+a_1)], \qquad 3.18 $$

$$ {}_4h_2(s) = \frac{1-\beta_2(s+a_1)}{s+a_1}, \qquad 3.19 $$

$$ {}_1h_2(s) = \frac{a_1[1-\beta_2(s+a_1[1-\pi_1(s)\,\nu_2(s)])]}{s+a_1[1-\pi_1(s)\,\nu_2(s)]}\times $$
$$ \times\{s^{-1}[1-c_{21}(s)]+\pi_1(s)\,{}_1\nu_2(s)\}, \qquad 3.20 $$

$$ {}_2h_2(s) = \frac{a_1[1-\beta_2(s+a_1[1-\pi_1(s)\,\nu_2(s)])]}{s+a_1[1-\pi_1(s)\,\nu_2(s)]}\times $$
$$ \times\{c_{21}(s)\,s^{-1}[1-\overline{\pi}_1(s)]+\pi_1(s)\,{}_2\nu_2(s)\}, \qquad 3.21 $$

$$ {}_3h_2(s) = \frac{a_1\{1-\beta_2(s+a_1[1-\pi_1(s)\,\nu_2(s)])\}}{s+a_1[1-\pi_1(s)\,\nu_2(s)]}\,\pi_1(s)\,{}_3\nu_2(s), \qquad 3.22 $$

$$ {}_4h_2(s) = \frac{1-\beta_2(s+a_1[1-\pi_1(s)\,\nu_2(s)])}{s+a_1[1-\pi_1(s)\,\nu_2(s)]}, \qquad 3.23 $$

$$ {}_1\nu_2(s) = \frac{a_1 s^{-1}[1-c_{21}(s)]\,[1-c_{12}(s+a_1)]}{s+a_1-a_1[1-c_{12}(s+a_1]\,\pi_1(s)}, \qquad 3.24 $$

$$ {}_2\nu_2(s) = \frac{a_1[1-c_{12}(s+a_1)]\,c_{21}(s)\,s^{-1}\,[1-\overline{\pi}_1(s)]}{s+a_1-a_1[1-c_{12}(s+a_1)]\,\pi_1(s)}, \qquad 3.25 $$

$$ {}_3\nu_2(s) = \frac{1-c_{12}(s+a_1)]}{s+a_1-a_1[1-c_{12}(s+a_1)]\,\pi_1(s)}, \qquad 3.26 $$

$$ {}_1\nu_2(s) = \frac{a_1 s^{-1}[1-c_{21}(s)]\,[1-c_{12}(s+a_1[1-\pi_1(s)])]}{s+a_1[1-\pi_1(s)]}, \qquad 3.27 $$

$$ {}_2\nu_2(s) = \frac{a_1[1-c_{12}(s+a_1[1-\pi_1(s)])]\,c_{21}(s)\,s^{-1}[1-\overline{\pi}_1(s)]}{s+a_1[1-\pi_1(s)]}; \qquad 3.28 $$

$$ {}_8\nu_2(s) = \frac{1 - c_{12}(s + a_1[1 - \pi_1(s)])}{s + a_1[1 - \pi_1(s)]}, \qquad 3.29 $$

$$ \sigma\pi(s) = \sigma_r\pi_r(s), \qquad 4.1 $$

$$ \sigma_k\pi_k(s) = \sigma_{k-1}\pi_{k-1}(s + a_k) + \sigma_{k-1}\{\pi_{k-1}(s + a_k[1 - \overline{\pi}_{kk}(s)]) - $$
$$ - \pi_{k-1}(s + a_k)\}\nu_k(s + a_k[1 - \overline{\pi}_{kk}(s)]) + a_k\pi_{kk}(s), \qquad 4.2 $$

$$ \pi_{kk}(s) = \nu_k(s + a_k[1 - \overline{\pi}_{kk}(s)])\overline{\pi}_{kk}(s), \qquad 4.3 $$

$$ \overline{\pi}_{kk}(s) = h_k(s + a_k[1 - \overline{\pi}_{kk}(s)]), \qquad 4.4 $$

$$ h_k(s) = \beta_k(s + \sigma_{k-1})\left\{1 - \frac{\sigma_{k-1}}{s + \sigma_{k-1}}[1 - \beta_k(s + \sigma_{k-1})]\pi_{k-1}(s)\nu_k(s)\right\}^{-1}, \qquad 4.5 $$

$$ h_k(s) = \beta_k(s + \sigma_{k-1}) + \frac{\sigma_{k-1}}{s + \sigma_{k-1}}[1 - \beta_k(s + \sigma_{k-1})]\pi_{k-1}(s)\nu_k(s), \qquad 4.6 $$

$$ h_k(s) = \beta_k(s + \sigma_{k-1}[1 - \pi_{k-1}(s)\nu_k(s)]), \qquad 4.7 $$

$$ h_k(s) = (s + \sigma_{k-1})\int_0^\infty \frac{e^{-(s+\sigma_{k-1})u}\,dB_k(u)}{s + \sigma_{k-1}\{1 - \pi_{k-1}(s)\nu_k(s)[1 - e^{-(s+\sigma_{k-1})u}]\}}, \qquad 4.8 $$

$$ \nu_k(s) = c_k(s + \sigma_{k-1})\left\{1 - \frac{\sigma_{k-1}}{s + \sigma_{k-1}}[1 - c_k(s + \sigma_{k-1})]\pi_{k-1}(s)\right\}^{-1}, \qquad 4.9 $$

$$ \nu_k(s) = c_k(s + \sigma_{k-1}[1 - \pi_{k-1}(s)]), \qquad 4.10 $$

$$ \nu_k(s) = (s + \sigma_{k-1})\int_0^\infty \frac{e^{-(s+\sigma_{k-1})\tau}\,dC_k(\tau)}{s + \sigma_{k-1}\{1 - \pi_{k-1}(s)[1 - e^{-(s+\sigma_{k-1})\tau}]\}}, \qquad 4.11 $$

$$ \sigma\pi(z, s) = \sigma_r\pi_r(z, s), \qquad 4.12 $$

$$ \sigma_k\pi_k(z,s) = \sigma_{k-1}\pi_{k-1}(z,s) + \gamma_{k-1}(z,s)\nu_k(z,s) + \frac{h_k(z,s)}{z_k - h_k(s + [\ ]_k)} \times $$
$$ \times[\gamma_{k-1}(s,z)\nu_k(s + [\ ]_k) + \sigma_{k-1}\pi_{k-1}(s + a_k) - \sigma_k\pi_k(s)], \qquad 4.13 $$

$$ \gamma_{k-1}(s,z) = \sigma_{k-1}[\pi_{k-1}(s + [\ ]_k) - \pi_{k-1}(s + a_k)] + a_k z_k, \qquad 4.14 $$

$$ h_k(z, s) = \{z_k[1 - \beta_k(s + [\ ]_k + \sigma_{k-1})][1 + \sigma_{k-1}[\pi_{k-1}(z, s) + $$
$$ + \pi_{k-1}(s + [\ ]_k)\nu_k(z,s)]\}\{s + [\ ]_k + \sigma_{k-1} - \sigma_{k-1}[1 - \beta_k(s + [\ ]_k + \sigma_{k-1})] \times $$
$$ \times \pi_{k-1}(s + [\ ]_k)\nu_k(s + [\ ]_k)\}^{-1}, \qquad 4.15 $$

$$h_k(z, s) = z_k \frac{1 - \beta_k(s + [\ ]_k + \sigma_{k-1})}{s + [\ ]_k + \sigma_{k-1}} \times$$

$$\times \{1 + \sigma_{k-1}[\pi_{k-1}(z, s) + \pi_{k-1}(s + [\ ]_k)\, \nu_k(z, s)]\}, \quad 4.16$$

$$h_k(z, s) = z_k \frac{1 - \beta_k(s + [\ ]_k + \sigma_{k-1}[1 - \pi_{k-1}(s + [\ ]_k)\, \nu_k(s + [\ ]_k)}{s + [\ ]_k + \sigma_{k-1}[1 - \pi_{k-1}(s + [\ ]_k)\, \nu_k(s + [\ ]_k)]} \times$$

$$\times \{1 + \sigma_{k-1}[\pi_{k-1}(z, s) + \pi_{k-1}(s + [\ ]_k)\, \nu_k(z, s)]\}, \quad 4.17$$

$$h_k(z, s) = z_k \{1 + \sigma_{k-1}[\pi_{k-1}(z, s) + \pi_{k-1}(s + [\ ]_k)\, \nu_k(z, s)]\} \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{\{1 - e^{-(s + [\ ]_k + \sigma_{k-1})u}\, dB_k(u)\}}{s + [\ ]_k + \sigma_{k-1} - \sigma_{k-1}\pi_{k-1}(s + [\ ]_k)\, \nu_k(s + [\ ]_k)[1 - e^{-(s + [\ ]_k + \sigma_{k-1})u}]},$$

4.18

$$\nu_k(z, s) = \frac{[1 - c_k(s + [\ ]_k + \sigma_{k-1})][1 + \sigma_{k-1}\pi_{k-1}(z, s)]}{s + [\ ]_k + \sigma_{k-1} - \sigma_{k-1}[1 - c_k(s + [\ ]_k + \sigma_{k-1})]\pi_{k-1}(s + [\ ]_k)},$$

4.19

$$\nu_k(z, s) = [1 + \sigma_{k-1}\pi_{k-1}(z, s)] \times$$

$$\times \frac{1 - c_k(s + [\ ]_k + \sigma_{k-1}[1 - \pi_{k-1}(s + [\ ]_k)])}{s + [\ ]_k + \sigma_{k-1}[1 - \pi_{k-1}(s + [\ ]_k)]}, \quad 4.20$$

$$\nu_k(z, s) = [1 + \sigma_{k-1}\pi_{k-1}(z, s)] \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{\{1 - e^{-(s + [\ ]_k + \sigma_{k-1})\tau}\}\, dC_k(\tau)}{s + [\ ]_k + \sigma_{k-1} - \sigma_{k-1}\pi_{k-1}(s + [\ ]_k)[1 - e^{-(s + [\ ]_k + \sigma_{k-1})\tau}]},$$

4.21

$$\sigma_k \bar{\pi}_k(s) = \sigma_{k-1}\bar{\pi}_{k-1}(s + a_k[1 - \bar{\pi}_{kk}(s)]) + a_k \bar{\pi}_{kk}(s), \quad 4.22$$

$$h_k(s) = \int_0^{\Theta_k} e^{-(s + \sigma_{k-1}[1 - \pi_{k-1}(s)\nu_k(s)])x}\, dB_k(x) +$$

$$+ e^{-(\sigma_{k-1}[\bar{\pi}_{k-1}(s) - \pi_{k-1}(s)\nu_k(s)])\Theta_k} \int_0^\infty e^{-(s + \sigma_{k-1}[1 - \bar{\pi}_{k-1}(s)])x}\, dB_k(x),$$

4.23

$$h_k(s) = \frac{\int_0^{\Theta_k} e^{-(s + \sigma_{k-1})x}\, dB_k(x) + e^{-\sigma_{k-1}\bar{\pi}_{k-1}(s)\Theta_k} \times}{1 - \sigma_{k-1}\pi_{k-1}(s)\, \nu_k(s) \times}$$

$$\frac{\times \int_{\Theta_k}^{\infty} e^{-(s+\sigma_{k-1}[1-\bar{\pi}_{k-1}(s)])x}\, dB_k(x)}{\times \int_0^{\Theta_k} e^{-(s+\sigma_{k-1})x}\, [1-B_k(x)]\, dx}, \qquad 4.24$$

$$\sigma_k \bar{\pi}_k(z,s) = \sigma_{k-1}\, \bar{\pi}_{k-1}(z,s) + h_k(z,s)\, \frac{\xi_k(s,z) - \xi_{k-1}(s,z)}{z_k - h_k(s + [\ ]_k)}, \qquad 4.25$$

$$h_k(z,s) = z_k[1 + \sigma_{k-1}(\pi_{k-1}(z,s) + \pi_{k-1}(s+[\ ]_k)\nu_k(z,s))] \times$$

$$\times \int_0^{\Theta_k} [1 - B_k(x)]\, e^{-\eta_k(s,z)x}\, dx + z_k(1 + \sigma_{k-1}\, \bar{\pi}_{k-1}(z,s)) \times$$

$$\times e^{-[\eta_k(s,z) - \xi_k(s,z)]\Theta_k} \int_{\Theta_k}^{\infty} [1 - B_k(x)]\, e^{-\xi_k(s,z)x}\, dx, \qquad 4.26$$

$$h_k(z,s) = \{z_k[1 + \sigma_{k-1}(\pi_{k-1}(z,s) + \pi_{k-1}(s+[\ ]_k)\, \nu_k(z,s))] \times$$

$$\times \int_0^{\Theta_k} [1 - B_k(x)]\, e^{-(s+\sigma_{k-1}+[\ ]_k)x}\, dx + z_k(1 + \sigma_{k-1}\, \bar{\pi}_{k-1}(z,s)) \times$$

$$\times e^{-[\eta_k(s,z) - \xi_k(s,z)]\Theta_k} \int_{\Theta_k}^{\infty} [1 - B_k(x)]\, e^{-\xi_k(s,z)x}\, dx\Big\} \times$$

$$\times \Big\{1 - \sigma_{k-1}\, \pi_{k-1}(s+[\ ]_k)\, \nu_k\,(s+[\ ]_k) \times$$

$$\times \int_0^{[\Theta} [1 - B_k(x)]\, e^{-(s+\sigma_{k-1}+[\ ]_k)x}\, dx\Big\}^{-1}, \qquad 4.27$$

$$\xi_k(s,z) = s + [\ ]_k + \sigma_{k-1}[1 - \bar{\pi}_{k-1}(s + [\ ]_k)], \qquad 4.28$$

$$\eta_k(s,z) = s + [\ ]_k + \sigma_{k-1}[1 - \pi_{k-1}(s+[\ ]_k)\nu_k(s+[\ ]_k)]. \qquad 4.29$$

Дополнение 2

§ 1
ПУАССОНОВСКИЙ ПОТОК

Рассмотрим поток однородных вызовов. Пусть t_1, $t_2, \dots$ — моменты поступления вызовов ($t_{k+1} \geqslant t_k$). Положим $z_k = t_k - t_{k-1}$. Если сл. в. z_k ($k \geqslant 1$) независимы в совокупности и одинаково распределены, то поток называется рекуррентным. Рекуррентный поток задается ф. р. $A(t) = P\{z_k < t\}$. В случае

$$A(t) = 1 - e^{-at}, \quad a > 0$$

рекуррентный поток называется пуассоновским (или простейшим) с параметром a. Пуассоновский поток обладает замечательными свойствами, выделяющими его среди всех других потоков. Отметим главные из них (доказательства можно найти в любом учебнике по теории массового обслуживания, например, [1, 4]).

1. Поток $\nu(t)$ называется стационарным, если для всякого целого числа $n \geqslant 1$ и всякого набора неотрицательных чисел $\tau_1, \dots, \tau_n$ распределение случайного вектора $\{\nu(c+\tau_k) - \nu(c),\ k = 1, \dots, n\}$ не зависит от выбора числа $c \geqslant 0$.

2. Поток $\nu(t)$ называется потоком без последствия и с отсутствием последствия, если процесс $\nu(t)$, является процессом с независимыми приращениями, т. е. для любого целого числа $n > 1$ и любых чисел $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n$ случайные числа (приращение процесса) $\nu(\tau_k) - \nu(\tau_{k-1})$, $k = 1, \dots, n$ независимы в совокупности.

3. Ординарность состоит в том, что вероятность поступления двух и более вызовов за малый промежуток времени Δ есть $0(\Delta)$.

4. *Наложение потоков.* Пусть поступают r независимых пуассоновских потоков вызовов с параметрами $a_1, \ldots, a_r$ соответственно. Тогда суммарный поток вызовов является также пуассоновским с параметром $a = a_1 + \ldots + a_r$.

5. *Просеивание потоков.* Пусть каждый поступающий вызов пуассоновского потока с параметром a независимо от других вызовов либо помечается с вероятностью $p (0 \leqslant p \leqslant 1)$, либо не помечается. Тогда поток отмеченных (неотмеченных) вызовов является также пуассоновским с параметром $ap (a[1-p])$.

6. Интенсивность пуассоновского потока вызовов с параметром a (среднее число вызовов, поступивших за единицу времени) равняется a. Среднее время между поступлениями вызовов

$$\alpha_1 = \frac{1}{a} = \int_0^\infty t d [1 - e^{-at}].$$

7. Среднее число вызовов, поступивших за промежуток времени длительности t.

$$N(t) = \sum_{n \geqslant 1} n P_n(t) = at.$$

8. Вероятность поступления какого-либо вызова в промежутке $[t, t + dt]$

$$dN(t) = a\,dt.$$

§ 2
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА И ЛАПЛАСА — СТИЛТЬЕСА

Приведем краткие сведения о преобразованиях Лапласа и Лапласа — Стилтьеса (Л. — С.). Подробнее с ними можно ознакомиться по специальной литературе.

1. Пусть комплексная функция $A(t)$ действительно переменного удовлетворяет условиям:

а) $A(t)=0$ при $t<0$ и на всяком отрезке $[0, T]$ имеет ограниченное изменение;

б) существуют действительные числа s_0 и A такие, что

$$|A(t)| \leqslant Ae^{s_0 t}.$$

Тогда при $\operatorname{Re} s > s_0$ существует

$$\bar{\alpha}(s) = \int_0^\infty e^{-st} A(t)\, dt.$$

Функция $\bar{\alpha}(s)$, являющаяся аналитической в $\operatorname{Re} s > s_0$, называется преобразованием Лапласа функции $A(t)$.

2. Пусть неотрицательная сл. в. A имеет ф. р. $A(t)$. Тогда

$$\alpha(s) = Me^{-sA} = \int_0^\infty e^{-st}\, dA(t)$$

называется преобразованием Л. — С. ф. р. $A(t)$.

Функции $\alpha(s)$ и $\bar{\alpha}(s)$ связаны соотношением $\alpha(s) = s\bar{\alpha}(s)$.

3. Пусть сл. в. A является суммой неотрицательных, независимых в совокупности сл. в. $A_1, A_2, \ldots, \ldots, A_n$ с ф. р. $A_1(t), \ldots, A_n(t)$ соответственно. Тогда

$$\alpha(s) = \alpha_1(s) \ldots \alpha_n(s),$$

$$A(t) = A_1(t) * \ldots * A_n(t),$$

где $*$ — символ стилтьесовской свертки:

$$A(t) * B(t) = \int_0^\infty A(t-x)\, dB(x) = \int_0^\infty B(t-x)\, dA(x).$$

4. Соответствия $A(t)$ и $\alpha(s)$:

а) $A_1(t) = A_2(t)$ равносильно $\alpha_1(s) = \alpha_2(s)$;

б) $A_n(t) \to A(t)$ (для точек непрерывности $A(t)$) равносильно $\alpha_n(s) \to \alpha(s)$.

5. Если существует $\lim\limits_{t \downarrow 0} A(t)$, то

$$\lim_{t\downarrow 0} A(t) = \lim_{s\to+\infty} \alpha(s), \quad \alpha(s) = s\int_0^\infty e^{-st} A(t)\,dt,$$

если существует $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t)$, то

$$\lim_{t\to+\infty} A(t) = \lim_{s\downarrow 0} \alpha(s).$$

Обратные утверждения не верны. В некоторой степени их заменяет Тауберова теорема.

Пусть функция $A(t)$ — неотрицательная и интеграл

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-st} A(t)\,dt$$

сходится для $\mathrm{Re}\, s > 0$. Тогда:

если существует $\lim\limits_{s\to+\infty} s^\lambda \varphi(s) = A$ или $\lim\limits_{s\downarrow 0} s^\lambda \varphi(s) = A$, то

$$\lim_{T\downarrow 0} T^{-\lambda} \int_0^T A(t) = dt = 0$$

или соответственно

$$\lim_{T\to\infty} T^{-\lambda} \int_0^T A(t)\,dt = A.$$

§ 3

МЕТОД ВВЕДЕНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО СОБЫТИЯ

Метод введения дополнительного события состоит в придании вероятностного смысла производящими функциями, а также преобразованиям Л.— С. ф. р. неотрицательных сл. в.

Пример 1. Пусть в некоторую систему поступает поток вызовов. Каждый поступающий вызов независимо от остальных объявляем либо красным, с вероятностью z $(0 \leqslant z \leqslant 1)$, либо синим. Если p_k есть вероятность поступления ровно k вызовов в некотором промежутке времени, то производящая функция распределения $\{p_k\}$

$$P(z)=\sum_{k\geqslant 0} p_k z^k$$

может интерпретироваться как вероятность того, что за этот промежуток поступали разве лишь красные вызовы.

Пример 2. Пусть сл. в. A с ф. р. $A(x)$ есть время «жизни» некоторого элемента. Предположим, что независимо от сл. в. A происходят «катастрофы», моменты наступления которых образуют пуассоновский поток с параметром $s>0$. Тогда

$$\alpha(s)=\int_0^\infty e^{-st}\,dA(t)$$

можно интерпретировать как вероятность того, что за время «жизни» элемента не происходили «катастрофы», а

$$\int_0^\infty [1-A(t)]\,d[1-e^{-st}]=$$

$$=s\int_0^\infty [1-A(t)]\,e^{-st}\,dt=1-\alpha(s)$$

есть вероятность того, что первая «катастрофа» произошла во время «жизни» элемента или, по-другому, за время «жизни» элемента происходили «катастрофы».

Метод введения дополнительного события позволяет находить соотношения между различными величинами и характеристиками (в терминах производящих функций и преобразований Л. — С.), исходя из их вероятностного смысла. При этом действия над ф. р. заменяются действиями над их преобразованиями Л. — С. Заодно отпадает необходимость проверки законности переходов к преобразованиям Л. — С. (это приходится делать, если соотношения содержат, например, производные от ф. р.). Область справедливости полученных соотношений ($s>0$; $0\leqslant z\leqslant 1$) при необходимости можно расширить, используя принцип аналитического продолжения.

Литература

1. Климов Г. П. Стохастические системы обслуживания. М., «Наука», 1966.
2. Гнеденко Б. В., Даниелян Э. А., Димитров Б. Н., Климов Г. П., Матвеев В. Ф. Приоритетные системы обслуживания. М., Изд-во Моск. ун-та, 1973.
3. Джейсуол Н. Очереди с приоритетами. М., «Мир», 1973.
4. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. М., «Наука», 1966.
5. Кокс Д., Смит В. Теория восстановления. М., «Советское радио», 1967.
6. Даниелян Э. А. Однолинейные стохастические системы обслуживания с приоритетами. М., Изд-во Моск. ун-та (статистика и стохаст. сист.), вып. 7, 1969.
7. Иванов Г. А. Длина очереди приоритетных систем обслуживания в нестационарном режиме. М., Изд-во Моск. ун-та, 1973.
8. Матвеев В. Ф. Система с «разогревом» после прерывания. — В сб.: Выч. методы и программирование, вып. 18. М., Изд-во Моск. ун-та, 1972.
9. Ахмедов А. К решению одной задачи теории массового обслуживания. — «Изв. АН Туркмен. ССР», физ.-техн., хим. и геолог., 1965, № 6.
10. Gaver D. P. Competitive gueuing: idleness probabilities under priority disciplines. — «J. Roy. State. Soc.», 1963, B. 25, N 2.
11. Mevert P. A. Priority sistem with setup times. — «Oper. Res.», 1968, vol. 16, N 3.
12. Firescu D., Muja A. Asupra timpului de orientare in sistemele de servire cu prioritate absoluta. — «An. Univ. Bucuresti Mat-Mec.» 1971, Anul. XX, N 2.
13. Eisenberg M. Multigueues with changeover times. — «Rept. NO. TR-35, 168, April», Contract DA-31-124-ARO(D)—209.
14. Nakamura G., Hashida O. Analysis of non preemptive priority gueueing sistem with setup times. — «Sixth Intern. Teeletraffic Congr. Minich», 1970, Sept. 9—15.
15. Гергей И. Система обслуживания с переключением. — «Studia Scientiarum Mathem. Hungarica», 1968, v. 3.

16. Sykes T. S. Simplified analisis of an alternating priority gueuing model with setup times. — «Oper. Res.», 1970, vol. 18, N 6.
17. Stehfest H. Algorithm 368. Numerical inversion of Laplace transform. — «Comm. ACM», 1970, vol. 13, N 1.
18. Mevert P. The Alternating gueuing process with setur times. — «Tech. Memo», 1966, N 3 (Case Institute of Technology Cleveland).
19. Gaver D. P. A comparison of gueue disiplines when servise orientation times occur. — «Nav. Res. Logistics Quart», 1963, v. 10.
20. Мишкой Г. К. Некоторые характеристики для системы обслуживания с ориентацией и абсолютным приоритетом. — «Изв. АН СССР», техн. киберн., 1974, №5.
21. Мишкой Г. К. Система обслуживания с ориентацией и абсолютным приоритетом. Идентичное обслуживание заново прерванного вызова. — «Ив. АН СССР», техн. киберн., 1974, №6.
22. Мишкой Г. К. Периоды занятости для двухприоритетной системы обслуживания с ориентацией и абсолютным приоритетом. — «Изв. АН Молд. ССР», физ.-техн. и мат. наук, 1974, № 1.
23. Мишкой Г. К. Приоритетная система обслуживания с ориентацией и идентичным обслуживанием заново прерванного вызова. — «Изв. АН Молд.ССР», физ.-техн. и мат. наук, 1974, №3.
24. Мишкой Г. К. Нестационарные характеристики прибора для системы обслуживания с ориентацией и абсолютным приоритетом. Труды III Всесоюзной школы-совещания по теории массового обслуживания. М., Изд-во Моск. ун-та, 1976.
25. Мишкой Г. К. Обслуживание с ориентацией и двумя типами относительного приоритета. — «Изв. АН СССР», техн. киберн., 1977, №4.
26. Мишкой Г. К. Система обслуживания с абсолютным приоритетом. — «Изв. АН СССР», техн. киберн., 1977, №2.
27. Волковинский М. Н., Кабалевский А. Н. Обслуживание со смешанным приоритетом в системах с потерями на переключение. — «Автоматика и телемеханика», 1975, №11.
28. Климов Г. П. Системы обслуживания с разделением времени, I. — «Теория вероятностей и ее примерения», 1974, т. XIX, №3.
29. Климов Г. П. Системы обслуживания с разделением времени, II. — «Теория вероятностей и ее примерения», 1978, т. XXIII, №2.

ГЕННАДИЙ ПАВЛОВИЧ
КЛИМОВ
ГЕОРГИЙ КОНСТАНТИНОВИЧ
МИШКОЙ

ПРИОРИТЕТНЫЕ СИСТЕМЫ
ОБСЛУЖИВАНИЯ
С ОРИЕНТАЦИЕЙ

Заведующий редакцией
С. И. Зеленский

Редактор Ф. И. Горобец

Художник Р. Х. Абрамов

Художественный редактор
Б. С. Вехтер

Технический редактор
З. С. Кондрашова

Корректор М. И. Эльмус

Тематический план 1979 г. № 80
ИБ № 705

Сдано в набор 15.09.79.
Подписано к печати 18.12.79.
Л-75212. Формат 84×108[1]/32.
Бумага тип. № 3.
Гарнитура литературная.
Высокая печать. Усл. печ. л. 11,76.
Уч.-изд. л. 11,62.
Тираж 2220 экз. Зак. 142.
Цена 1 р. 70 к. Изд. № 521.

Издательство
Московского университета
Москва, К-9, ул. Герцена, 5/7.
Типография Изд-ва МГУ.
Москва, Ленинские горы

1р. 70к.

